

Thema Nr. 2  
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

**Aufgabe 1:**

Man bestimme alle Gleichgewichtspunkte des ebenen autonomen Systems

$$\begin{aligned}x' &= 2 - xy \\ y' &= \frac{x}{2} - y^3\end{aligned}$$

und untersuche jeden der Gleichgewichtspunkte auf Stabilität, asymptotische Stabilität bzw. Instabilität.

**Aufgabe 2:**

Gegeben sei die skalare Differentialgleichung

$$x'(2x^3 + 2x + 2xt^2) = -2t^3 - 2x^2t.$$

Man zeige, dass jede Lösung  $x(t)$

- a) beschränkt bleibt,
- b) nicht für alle Zeiten  $t \in \mathbb{R}$  existiert.

Hinweis: Man finde ein geeignetes erstes Integral  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass  $F(x(t), t)$  unabhängig von  $t$  ist.

**Aufgabe 3:**

Für  $|z| < r$  mit  $r > 0$  sei  $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  konvergent.

- a) Beweisen Sie für  $0 < \rho < r$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\phi})|^2 d\phi = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n}.$$

Hinweis:  $\int_0^{2\pi} e^{ik\phi} d\phi = 0$  für  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

- b) Folgern Sie: Sei  $\rho \in (0, r)$  fest. Ist  $P \in \mathbb{C}[z]$  ein Polynom  $d$ -ten Grades, so ist

$$\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\phi}) - P(\rho e^{i\phi})|^2 d\phi$$

minimal für  $P(z) = \sum_{n=0}^d a_n z^n$ .

**Aufgabe 4:**

Es sei  $\alpha$  reell.

- a) Es bezeichne  $\gamma$  den positiv orientierten Halbkreis um den Ursprung vom Radius  $R > 0$  mit Anfangspunkt  $z = +R$  und Endpunkt  $z = -R$ . Zeigen Sie

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma} \frac{e^{i\alpha z}}{1+z^2} dz = 0 \quad \text{für } \alpha > 0.$$

- b) Folgern Sie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2} dx = \pi e^{-\alpha} \quad \text{für } \alpha > 0.$$

- c) Berechnen Sie das Integral aus (b) auch für  $\alpha \leq 0$ .

**Aufgabe 5:**

- a) Finden Sie die Laurentreihenentwicklung der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)^3(z^2+1)}$$

um  $z_0 = -2$ . Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der gefundenen Laurentreihe.

- b) Berechnen Sie den Wert des Integrals  $\int_{|z+1|=2} f(z) dz$ . Der Integrationsweg wird in positiver Richtung (gegen den Uhrzeigersinn) durchlaufen.