

Thema Nr. 1  
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

**Aufgabe 1:**

Für die Differentialgleichung  $u'(x) = \sqrt{1 - u(x)^2}$  bestimmen Sie jeweils alle Lösungen  $u : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  zu den Anfangswerten

- a)  $u(0) = 1$ ,
- b)  $u(0) = -1$ .

(Hinweis: Auch wenn es nicht so aussieht, sind beide Fragen grundverschieden. Achten Sie unbedingt auf das Vorzeichen von  $u'$ . Eine Skizze des Graphen von  $u$  kann hilfreich sein.)

**Aufgabe 2:**

Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Differentialgleichung  $u'' - 10u' + 34u = 0$  für die Randwertprobleme

- a)  $u(0) = 0, u(\frac{\pi}{2}) = 1$ ;
- b)  $u(0) = 0, u(\pi) = 1$ ;
- c)  $u(0) = 0, u(\pi) = 0$ .

**Aufgabe 3:**

Für jedes  $E \in \mathbb{C}$ , betrachten Sie die Differentialgleichung  $H'' - 2zH' + (E - 1)H = 0$  für eine Funktion  $H$ , die analytisch in der Variable  $z$  ist.

- a) Bestimmen Sie die Lösungen der Form  $H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n$ . Zeigen Sie, dass die Koeffizienten eine Rekursionsrelation erfüllen, die Sie angeben sollen.
- b) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihe.
- c) Geben Sie die geraden Lösungen an.
- d) Für welche Werte von  $E$  ist die Lösung von (c) ein Polynom?

**Aufgabe 4:**

- a) Bestimmen Sie ein maximales Gebiet  $G \subset \mathbb{C}/\{-i, i\}$ , das die Einheitskreisscheibe  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  enthält, und auf dem die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

eine Stammfunktion  $F$  besitzt.

- b) Falls  $F(0) = 0$ , zeigen Sie

$$F(\tan(z)) = 0$$

für alle  $z \in G' = \{z \in \mathbb{C} \mid \tan(z) \in G\}$ .

**Aufgabe 5:**

Sei  $f$  meromorph auf  $\mathbb{C}$  und ohne Pol auf der reellen Achse. Zudem gelte  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ , falls  $\Im(z) \geq 0$ , wobei  $\Im(z) = y$  für  $z = x + iy$ .

- a) Sei  $\Gamma_R$  der Weg in der oberen Halbebene gegeben durch  $|z| = R$ , orientiert im positiven Sinne. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) e^{iz} dz = 0.$$

- b) Verwenden Sie (a), um das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx$$

durch die Residuen von  $f$  auszudrücken.