

Thema Nr. 3  
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

*Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen! Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.*

**Bezeichnungen:** Sei  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  und  $\bar{\mathbb{D}} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ .

**Aufgabe 1:**

(drei Kurzaufgaben zur Funktionentheorie)

- a) Begründen Sie, dass die Funktion  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 2z + 2}$  eine konvergente Potenzreihen-Entwicklung um  $z = 0$  besitzt und geben Sie deren Konvergenzradius an.
- b) Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $|f(z)| \geq \frac{1}{|z|}$  für alle  $z \neq 0$ .
- c) Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f \circ f = f$ .

**Aufgabe 2:**

Zeigen Sie, dass die Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) := z^3 + 2z + ce^{z^2}$  für alle  $c \in \mathbb{C}$  mit  $|c| < e^{-1}$  genau eine Nullstelle im Einheitskreis  $\bar{\mathbb{D}}$  besitzt.

**Aufgabe 3:**

Berechnen Sie für  $\omega > 0$  das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^2 + x + 1} dx := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \frac{e^{i\omega x}}{x^2 + x + 1} dx.$$

*Hinweis:* Betrachten Sie das obige Integral längs eines geeigneten, geschlossenen Wegs in der komplexen Ebene und gehen Sie zum „Grenzwert“ über. Führen Sie dabei alle nötigen Abschätzungen explizit aus.

**Aufgabe 4:**

Gegeben sei das ebene autonome System

$$\frac{dx}{dt} = y \cos x$$

$$\frac{dy}{dt} = \sin x.$$

- a) Begründen Sie, warum das obige System für jeden Anfangswert  $(x_0, y_0)$  eindeutig lösbar ist und warum die Lösungen für alle  $t \in \mathbb{R}$  existieren.
- b) Bestimmen Sie alle Ruhelagen des Systems und untersuchen Sie diese auf Stabilität.

**Aufgabe 5:**

Gegeben sei die homogene lineare Differentialgleichung 3. Ordnung

$$(*) \quad \frac{d^3x}{dt^3} + x = 0.$$

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung  $x(t)$  von (\*).
- b) Bestimmen Sie alle Startwerte  $(x(0), \dot{x}(0), \ddot{x}(0)) \in \mathbb{R}^3$ , so dass für deren eindeutige Lösung  $x(t)$  gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$