Thema Nr. 2

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1: Beweisen Sie die beiden Gleichheiten

$$\text{(a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 2x^2 + 1} = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{(b)} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \cos t} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Aufgabe 2: Beweisen Sie, dass durch

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^z}$$

in der Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ eine holomorphe Funktion f definiert ist.

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung $y'' - 4y' - 5y = f$ für

$$\text{(a)}\ f(t) = 8e^t, \qquad \text{(b)}\ f(t) = 6e^{-t}.$$

Aufgabe 4: Sei $\varepsilon > 0$, und sei $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion mit $|w(x)| \leq \frac{1}{2}|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| < \varepsilon$, wobei $|x| = |(x_1, \dots, x_n)| = \sqrt{x_1^2 + \dots x_n^2}$ die euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ bezeichne. Sei weiter $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = -x + w(x).$$

Schätzen Sie $\frac{d}{dt}|x(t)|^2$ ab und folgern Sie aus Ihrem Ergebnis, dass aus $|x(0)| < \varepsilon$ stets $|x(t)| < \varepsilon$ für alle $t > 0$ sowie $x(t) \to 0$ für $t \to \infty$ folgt.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5: Herr S. hat einen Geldbetrag ("Kapital") $a > 0$ auf der Bank liegen. Sein jeweiliges Guthaben wird pro Monat mit einem festen Zinssatz $p > 0$ verzinst. Jeden Monat hebt Herr S. einen festen Geldbetrag $b > 0$ von seinem Konto ab. Wenn dieser Betrag zu groß ist, wird das Kapital irgendwann aufgezehrt sein. Wie groß darf b (in Abhängigkeit von a und p) höchstens sein, damit das nicht passiert?

[Anleitung: Es sei t die Anzahl der Monate seit der Einzahlung des Kapitals und $y(t)$ das Bankguthaben zur Zeit t. Bestimmen Sie $y(t+1)$ in Abhängigkeit von $y(t)$. Nun ersetzen Sie t durch eine reelle Variable und $y(t+1) - y(t)$ durch die Ableitung $y'(t)$; den Fehler, den Sie dabei machen, dürfen Sie vernachlässigen.]