Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung: Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Bitte begründen Sie alle Schlussweisen und Rechenschritte durch einen kurzen Text.

Aufgabe 1.

Die euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$ werde mit der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ vermöge der Zuordnung $(x, y) \mapsto z := x + iy$ identifiziert.

a) Sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(x, y) := x^2 - y^2.$$

Man zeige: Es gibt eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(f) = u$.

b) Gibt es eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass

$$u_1(x, y) := \sin(x) + \varphi(y)$$

Realteil einer holomorphen Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist? Falls ja, gebe man ein solches g explizit an.

c) Gibt es eine stetige Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die nicht identisch verschwindet, so dass

$$u_2(x, y) := \sin(x)\ \psi(y)$$

Realteil einer holomorphen Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist? Falls ja, gebe man ein solches h explizit an.

Aufgabe 2.

Berechnen Sie:

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{1 + x^2}\, dx.$$

Hinweis: Definieren Sie auf $G = \mathbb{C} \setminus \{-it \mid t \in [0, \infty)\}$ eine geeignete Logarithmusfunktion, und integrieren Sie für $0 < \varepsilon < 1 < R$ über den Rand der Menge

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \varepsilon < |z| < R\}.$$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3.

Es sei f das Polynom

$$f(z) := z^5 + z + \frac{1}{2}.$$

Man zeige, dass f im Kreis $\left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq \frac{3}{4} \right\}$ genau eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 4.

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$y' = A(x) \cdot y, \quad A(x) = \frac{1}{x} B, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad x > 0.$$

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen $y(x)$.
Hinweis: Umformung zu $z' = B \cdot z$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von a) die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = A(x) \cdot y + b(x), \quad y(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b(x) = x^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix},$$

und dann die allgemeine Lösung von $y' = A(x) \cdot y + b(x)$.

Aufgabe 5.

Bestimmen Sie für das Anfangswertproblem

$$y' = f(y), \quad y(x_0) = y_0,$$

eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ und Werte $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, so dass der maximale Definitionsbereich $I_{\max}$ der Lösung $y(x)$ lautet

a) $I_{\max} = (-\pi/2, \pi/2)$

b) $I_{\max} = (1, \infty)$.