Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung: Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Bitte begründen Sie alle Schlussweisen und Rechenschritte durch einen kurzen Text.

Aufgabe 1.

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Es gibt eine holomorphe Funktion f auf einer offenen Umgebung um 0 mit der Eigenschaft

$$|f^{(n)}(0)| \geq (n!)^2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

b) Es gibt keine holomorphe Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$f(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0\}.$$

c) Jede holomorphe Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$\operatorname{Re} f(z) = (\operatorname{Im} f(z))^2 \text{ für alle } z \in \mathbb{C}$$

ist konstant.

Aufgabe 2.

Sei $c \in \mathbb{C}$ und $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Ferner gelte $f(cz) = c\,f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:
a) Falls $|c| \neq 1$, so existiert ein $a \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = az$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
b) Falls $c = -1$, so existiert eine ganze Funktion $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z\,g(z^2)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 3. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{+r} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} \, dx.$$

Hinweis: Integrieren Sie die Funktion $z \mapsto \dfrac{ze^{iz}}{z^2+1}$ über den Rand des Rechteckes

mit den Eckpunkten $-r, r, r + ir \, und \, -r + ir, r > 0.$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4.

Gegeben sei die parameterabhängige, skalare Differentialgleichung 2.Ordnung

(1) $$\ddot{x} = \alpha\dot{x} - x + x^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Transformieren Sie (1) auf ein äquivalentes Differentialgleichungssystem 1. Ordnung der Form

(2) $$\begin{aligned} \dot{x} &= f_\alpha(x,y), \\ \dot{y} &= g_\alpha(x,y). \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie für $\alpha \neq 0$ alle asymptotisch stabilen Ruhelagen des Differentialgleichungs-systems (2).

Aufgabe 5.

Gegeben sei das inhomogene, lineare Anfangswertproblem

(3) $$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b, \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0,$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}, u \in \mathbb{R} \text{ konstant.}$$

a) Berechnen Sie e^{At}.

b) Sei $\Phi_t(x_0, y_0; u)$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (3). Bestimmen Sie alle $(x_0, y_0)^T \in \mathbb{R}^2$, für die ein $u \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\Phi_1(x_0, y_0; u) = 0.$$