Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung: Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Bitte begründen Sie alle Schlussweisen und Rechenschritte durch einen kurzen Text.

Aufgabe 1.

Sei f auf dem Gebiet $G = \{z : |z| < 1 + \rho\}$, $\rho > 0$, eine holomorphe Funktion mit

$$|f(e^{i\theta})| = c \text{ für } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Sei $z = 0$ eine einfache Nullstelle von f und $f(z) \neq 0$ für $z \in G \setminus \{0\}$. Man zeige:
Es existiert ein $c_1 \in \mathbb{C}$ mit $|c_1| = c$, so dass $f(z) = c_1 z$ für alle $z \in G$ gilt.

Aufgabe 2.

Man berechne mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{5 - 4\cos(2x)}\, dx.$$

Aufgabe 3.

Sei $\lambda > 1$. Man zeige, dass die Gleichung $e^{-z} + z = \lambda$ in der Halbebene $Re(z) > 0$ genau eine Lösung hat, die überdies reell ist.
Hinweis: Betrachten Sie den einfach geschlossenen Weg in der Halbebene $Re(z) \geq 0$, der durch den Halbkreis um 0 mit Radius $R > 1 + \lambda$ und die Strecke, welche die beiden Punkte iR und $-iR$ auf der imaginären Achse verbindet, gegeben ist.

Aufgabe 4.

Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 4y = 5\cos x + 8e^{-2x}.$$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5.

a) Es seien $p,\ q$ stetig auf $[a,\ b]$ und y_1, y_2 ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x)+p(x)\,y'(x) + q(x)\,y = 0.$$

Man zeige, dass die Funktionen y_1, y_2 keine gemeinsame Nullstelle in $(a,\ b)$ haben und an keinem gemeinsamen Punkt in $(a,\ b)$ ein Extremum annehmen.

b) Es sei $L = \{\lambda \in \mathbb{R},\ \sin(\lambda) + \lambda\cos(\lambda) \neq 0\} \cup \{0\}$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ betrachte man die Randwertaufgabe

$$y''+\lambda^2 y = 0, \quad y(0) = 1,\ y(1) + y'(1) = 0.$$

Man zeige, dass die Randwertaufgabe genau für $\lambda \in L$ lösbar ist und bestimme für diese λ ihre Lösung.