Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge sprachlich angemessen, nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben. Die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen über holomorphe Funktionen gelten. Geben Sie jeweils eine Begründung oder ein Gegenbeispiel an.

a) Die Funktion
$$f\colon \{z \in \mathbb{C}\colon |\operatorname{Re} z| < 1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) := e^z$$
ist beschränkt.

b) Die Funktion
$$f\colon \{z \in \mathbb{C}\colon |\operatorname{Im} z| < 1\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) := \frac{1}{1+z^2}$$
ist beschränkt.

c) Ist $\Omega := \{z \in \mathbb{C}\colon |\operatorname{Re} z| > 1\}$ und $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f^{(n)}(2) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so ist f die Nullfunktion.

d) Ist $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und f nicht konstant, so stimmt der Abschluss von $f(\mathbb{C})$ mit $\mathbb{C}$ überein.

(1 + 1 + 2 + 2 Punkte)

Aufgabe 2:

In dieser Aufgabe bezeichne f die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x \ln |x|, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$

a) Zeigen Sie, dass f nicht lokal lipschitzstetig ist.

b) Bestimmen Sie die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung des Anfangswertproblems
$$x' = f(x)\,, \qquad x(0) = e^{-1}\,.$$
Hinweis: Es könnte helfen, die Ableitung der Funktion $G :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $G(x) := \ln(|\ln(x)|)$ zu berechnen.

c) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $x' = f(x)$. Erläutern Sie, was sich über das Monotonieverhalten der Lösung aussagen lässt, falls $0 < x(t) < 1$ für alle $t \in I$ gilt, und was, falls $-1 < x(t) < 0$ für alle $t \in I$ gilt.

d) Entscheiden Sie mit Begründung, ob das Anfangswertproblem
$$x' = f(x)\,, \qquad x(0) = 0$$
eine eindeutig bestimmte maximale Lösung besitzt.

(1 + 2 + 1 + 2 Punkte)

Aufgabe 3:

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto 2z^2 + 2 + e^{iz}$$

genau eine Nullstelle ξ in $U := \{z \in \mathbb{C} : |z - i| < 1\}$ besitzt und diese einfach ist. Folgern Sie hieraus, dass

$$g : U \setminus \{\xi\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{e^z}{f(z)}$$

keine Stammfunktion besitzt.

b) Es sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$, $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $u := \mathrm{Re}(f)$ und $v := \mathrm{Im}(f)$. Skizzieren Sie die Menge

$$Q = \{w \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(w)| + |\mathrm{Im}(w)| = 1\}$$

und zeigen Sie: Falls $|u(z)| + |v(z)| = 1$ für jedes $z \in G$, so ist f konstant auf G.

(4 + 2 Punkte)

Aufgabe 4:

Auf

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y \leq 0\} \cup \{(0, 0)\}$$

betrachten wir die Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := (1 + x)(1 + y) - e^x.$$

a) Geben Sie an, welche Punkte in $\mathbb{R}^2$ innere Punkte beziehungsweise Randpunkte von D sind. Entscheiden Sie begründet, ob D offen beziehungsweise abgeschlossen ist.

b) Entscheiden Sie mit Begründung, ob f im Innern von D lokale Extremalstellen besitzt.

c) Geben Sie mit Nachweis alle lokalen Extremalstellen von f an, die auf dem Rand von D liegen. Bedenken Sie, dass diese Stellen gemäß Definition von f in D liegen müssen.

(2 + 2 + 2 Punkte)

Aufgabe 5:

a) Zeigen Sie, dass alle maximalen Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$x' = t + \frac{\sin t}{1 + x^2 + y^2} \cdot y \qquad y' = 3 + \frac{\cos t}{1 + x^2 + y^2} \cdot x$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert sind.

b) Es sei $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lokal lipschitzstetig mit

$$|g(x)| \leq \frac{|x|}{2}$$

für jedes $x \in \mathbb{R}^n$, wobei $| \cdot |$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ bezeichne. Weiter sei $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $0 \in I$ eine maximale Lösung des autonomen Systems

$$x' = -x + g(x).$$

(1) Es sei $\varphi : I \to \mathbb{R}$ definiert durch $\varphi(t) := |x(t)|^2$. Zeigen Sie: $\varphi'(t) \leq -\varphi(t)$ für jedes $t \in I$.

(2) Zeigen Sie: $I \supseteq [0, \infty)$ und $x(t) \to 0$ für $t \to \infty$.

(2 + (1+3) Punkte)