Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen zusammenhängenden Text zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

(1+2+3 Punkte) Bestimmen Sie die Anzahl (gezählt mit Vielfachheit) von Nullstellen des Polynoms $f(z) = z^6 - z^3 + 1$

a) in $\mathbb{C}$,

b) in $\mathbb{R}$,

c) im Kreisring $R = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \frac{1}{2} < |z| < 2 \right\}$.

Aufgabe 2:

(2+4 Punkte)

a) Bestimmen Sie den Wert des komplexen Kurvenintegrals $\int_\gamma \frac{\sin(\pi z)}{z^2 + 2z + 1} \mathrm{d}z$ für die Kurve $\gamma\colon [-3, 3] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := 3e^{i\pi t}$.

b) Es sei $G = \{z \in \mathbb{C} \;:\; 2 < |z| < 4\}$. Zeigen Sie: Es existiert eine holomorphe Funktion $h : G \to \mathbb{C}$ derart, dass
$$\frac{z-1}{z+1} = e^{h(z)} \quad \text{für jedes } z \in G\,.$$

Aufgabe 3:

(1+1+3+1 Punkte) Für $\alpha > 0$ ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = x + \alpha y$. Weiter definieren wir für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Funktion $g_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $g_n(x, y) = x^{2n} + y^{2n}$.

a) Skizzieren Sie die Mengen $M_n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, g_n(x, y) = 1\}$ für $n = 1, 2, 3$ in *einem* Bild.

b) Begründen Sie, warum f_α auf jedem M_n Maximum und Minimum annimmt.

c) Bestimmen Sie für jedes n die entsprechende Lage $(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$ des Maximums von f unter der Nebenbedingung $g_n \equiv 1$.

d) Bestimmen Sie die Grenzwerte von $\bar{x}_n$ und $\bar{y}_n$ im Limes $n \to \infty$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

(2+2+2 Punkte) Es seien Funktionen $f, g, h : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{\sin(\ln x)}{x}, \quad g(x) = \frac{\sin(e^{-x})}{x}, \quad h(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x}.$$

a) Entscheiden Sie, ob f uneigentlich integrierbar ist.
Nutzen Sie hierfür eine geeignete Substitution unter dem Integral.

b) Entscheiden Sie, ob g uneigentlich integrierbar ist.
Schätzen Sie dazu den Integranden geeignet ab.

c) Begründen Sie, dass h uneigentlich integrierbar ist.
Hinweis: Vergleichen Sie den Integralwert mit der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, wobei

$$a_k = \int_k^{k+1} \frac{\sin(\pi x)}{x}\, dx \quad \text{gilt,}$$

oder lösen Sie die Aufgabe durch partielle Integration.

Aufgabe 5:

(1+2+2+1 Punkte) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = v(x(t)), \quad x(0) = \bar{x} \in \mathbb{R}^2$$

für das gegebene Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$v(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_1^5 \\ \\ x_1^4 x_2 + x_1^2 \cos \frac{1}{x_1} \end{pmatrix} \quad \text{für } x_1 \neq 0,$$

sowie $v(0, x_2) = 0$ für alle $x_2 \in \mathbb{R}$. Sie dürfen im weiteren benutzen, dass es zu jedem $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige maximale Lösung $x : I \to \mathbb{R}^2$ gibt.

a) Begründen Sie, dass v stetig ist.

b) Geben Sie die erste Komponente $x_1(t)$ der Lösung $x : I \to \mathbb{R}^2$ explizit an.

c) Zeigen Sie, dass

$$\Gamma = \left\{ \left(r, \frac{1}{r} \sin \frac{1}{r} \right) \,\middle|\, r > 0 \right\}$$

die Trajektorie (Spur der Lösung) zum Anfangswert $\bar{x} = (1/\pi, 0)$ ist.

d) Begründen Sie, dass alle Fixpunkte von v instabil sind.