Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen zusammenhängenden Text zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

(2 + 2 + 2 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = 0$ für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt.

(b) Bestimmen Sie die Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ aller Punkte, in denen die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \begin{cases} x\cos(x^{-1}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

differenzierbar ist und berechnen Sie für diese Punkte die Ableitung von f. Ist $f' : D \to \mathbb{R}$ stetig?

(c) Sei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| + |y| \leq 1\}$. Skizzieren Sie D und berechnen Sie das Integral $I := \int_D (x^3 + y^2)\, dx\, dy$.

Aufgabe 2:

(6 x 1 Punkt) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen über alle holomorphe Funktionen $f\colon G \to \mathbb{C}$ ($G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet) gelten. Bei richtigen Aussagen geben Sie eine kurze Begründung (mit Nennung aller benutzten Sätze) an, bei falschen ein Gegenbeispiel. Zur Erinnerung: Ein Gebiet ist eine nichtleere, offene und zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$.

(a) Ist $G = \mathbb{C}$ und f beschränkt, so ist f konstant.

(b) Ist $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und f beschränkt, so ist f konstant.

(c) Ist G die offene rechte Halbebene und f beschränkt, so ist f konstant.

(d) Ist G ein beschränktes Gebiet und hat f unendlich viele Nullstellen, so ist f konstant.

(e) Ist G ein beschränktes Gebiet und hat f unendlich viele Nullstellen in einer kompakten Teilmenge von G, so ist f konstant.

(f) Ist G ein beschränktes Gebiet, so ist $f(G)$ beschränkt.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

(1 + 1 + 1 + 3 Punkte) Auf $(0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ betrachten wir die Differentialgleichung

$$\dot{x} = (x - 2)(x + 2)\log(x).$$

(a) Zeigen Sie, dass zu jedem $x_0 > 0$ eine eindeutige maximale Lösung $x\colon I \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung zu dem Anfangswert $x(0) = x_0$ existiert. Hierbei ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$.

(b) Bestimmen Sie alle Anfangswerte, für die die maximale Lösung konstant ist.

(c) Bestimmen Sie alle $x_0 > 0$, für die die maximale Lösung $x : I \to \mathbb{R}$ zum Anfangswert $x(0) = x_0$ streng monoton wächst und alle $x_0 > 0$, für die die maximale Lösung von $x : I \to \mathbb{R}$ zum Anfangswert $x(0) = x_0$ streng monoton fällt.

(d) Sei $x_0 := \frac{1}{2}$ und $x\colon I = (a, b) \to \mathbb{R}$ die maximale Lösung zu dem Anfangswert x_0. Bestimmen Sie a, b und die Grenzwerte $\lim_{t\to a} x(t)$ und $\lim_{t\to b} x(t)$. Für a ist eine Darstellung als Integral ausreichend.

Aufgabe 4:

(1+1+2+2 Punkte)
Für $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ bezeichne $B_r(a) := \{z \in \mathbb{C}\colon |z - a| < r\}$ die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt a und Radius r. Weiter seien $D_+ := B_{\sqrt{2}}(1)$, $D_- := B_{\sqrt{2}}(-1)$ und $D := D_+ \cap D_-$. Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Funktion G zu bestimmen, die D biholomorph auf die Einheitskreisscheibe $B_1(0)$ abbildet.

a) Begründen Sie kurz, warum es eine solche Funktion G geben muss und warum diese keine Möbius-Transformation sein kann.

b) Zeigen Sie: ∂D_+ und ∂D_- schneiden sich in den beiden Punkten i und $-i$ jeweils im Winkel $\pi/2$.

c) Es sei
$$T : \mathbb{C}\backslash\{i\} \to \mathbb{C}, \quad T(z) = \frac{i + z}{i - z}.$$

Zeigen Sie: $T(D) = \{re^{i\varphi} \in \mathbb{C} : r > 0 \text{ und } \varphi \in (-\pi/4, \pi/4)\} =: U$.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst das Bild der Geraden $i\mathbb{R}$ und dann der beiden Kreislinien ∂D_+ und ∂D_- unter der winkeltreuen Möbius-Transformation T.

d) Bestimmen Sie eine explizite Darstellung einer biholomorphen Abbildung h von U auf $B_1(0)$, und leiten Sie hieraus eine explizite Darstellung der gesuchten Funktion G ab.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

(1+2+3 Punkte)

Gegeben seien die Menge

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y(y^2 - x) = 0\}$$

und die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus S \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) := \frac{1}{2y} + \frac{x^3}{y(y^2 - x)}$$

zusammen mit dem Anfangswertproblem

$$\text{(AWP)} \qquad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

wobei das Anfangsdatum (x_0, y_0) in $\mathbb{R}^2 \setminus S$ zu wählen ist.

a) Fertigen Sie eine beschriftete Skizze der Menge S an und begründen Sie, warum (AWP) für alle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus S$ eine eindeutig bestimmte maximale Lösung besitzt.

b) Sei $y\colon I \to \mathbb{R}$ die maximale Lösung von (AWP) und

$$E\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad E(x, y) := (y^2 - x)^2 - x^4.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung $x \mapsto E(x, y(x))$ auf dem Intervall I konstant ist.

c) Sei $x_0 = 0$. Bestimmen Sie die Menge der $y_0 > 0$, für die die maximale Lösung des zugehörigen (AWP) auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.