Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1:

Es seien $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom sowie $\gamma_{r,w}$ der positiv orientierte Rand der Kreisscheibe mit Radius $r > 0$ um $w \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie für das komplexe Wegintegral:

$$\oint_{\gamma_{r,w}} \overline{p(z)}\, dz = 2\pi i\, r^2\, \overline{p'(w)}.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

Gegeben ist folgendes System linearer Differentialgleichungen für $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} x(t).$$

(a) Zeigen Sie, dass der Ursprung $(0,0)$ ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt ist.

(b) Geben Sie einen Wert für $x(0) \in \mathbb{R}^2$ an, so dass die euklidische Norm $\|x(t)\|$ der entsprechenden Lösung x *keine* monotone Funktion der Zeit $t \in \mathbb{R}$ ist.

(c) Bestimmen Sie einen Parameter $p > 0$ derart, dass für jede Lösung x die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = x_1(t)^2 + px_2(t)^2$ monoton in der Zeit $t \in \mathbb{R}$ ist.

Hinweis: Zum Lösen der Aufgabe ist es nicht notwendig, die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems zu bestimmen. (2+2+2 Punkte)

Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x + y^2$. Bestimmen Sie für jedes $r > 0$ die Menge aller kritischen Punkte von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = r^2$ und geben Sie jeweils mit Begründung an, ob es sich bei diesen um lokale Maxima oder Minima handelt. (6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Im folgenden sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine integrable Funktion.

(a) Formulieren Sie den Transformationssatz für Integrale im Spezialfall, dass Sie das Integral von $f \circ T$ zurückführen auf das Integral über f, wobei die Transformation $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine *lineare* Abbildung ist.

(b) Integrieren Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\left(1 + (x_1 + x_2)^2\right)\left(1 + (2x_1 + 5x_2)^2\right)},$$

über $\mathbb{R}^2$.

(2+4 Punkte)

Aufgabe 5:

Gegeben ist die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \frac{n}{1 + n^2x^2}.$$

Beweisen Sie:

(a) f_n konvergiert auf dem offenen Intervall $(0, 1)$ punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen null.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \frac{\pi}{2}$.

(c) Für jeden Parameter $\alpha \in (0, 1)$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 x^\alpha f_n(x)\, dx = 0$.

(2+2+2 Punkte)