Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1: (2+2+2 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sin\left(\frac{1}{z}\right)$.

a) Bestimmen Sie den Typ der isolierten Singularität von f bei 0.

b) Es sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $t \mapsto e^{2it}$. Berechnen Sie $\int\limits_\gamma f(z)\,dz$.

c) Es sei $U := \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 2\}$. Zeigen Sie, dass es keine Folge von Polynomfunktionen $(p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, so dass $(p_n|_U)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen $f|_U$ konvergiert.

Aufgabe 2: (1+5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^3}$ stetig und integrierbar ist.

b) Berechnen Sie $\int\limits_0^\infty \dfrac{x}{1+x^3}\,dx$.

Hinweis: Sie können einen geschlossenen Weg verwenden, der durch 0, R und $Re^{\frac{2\pi i}{3}}$ geht, oder die Partialbruch-Zerlegung benutzen.

Aufgabe 3: (1.5+1.5+1.5+1.5 Punkte)
Zeigen Sie:

a) Ist $S := \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\,(z)| < 1\}$, so gibt es keine biholomorphe Abbildung $f : S \to \mathbb{C}$.

b) Es gibt keine holomorphe Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = 2i$ und $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

c) Ist $U := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(-2) = 1$ und $f(2) = -1$, dann gibt es $z, w \in U$ mit $f(z), f(w) \in \mathbb{R}$ und $f(z) < -1$, $f(w) > 1$.

d) Es gibt eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und $e^{\frac{1}{z_n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} i$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4: **(3+3 Punkte)**
Zeigen Sie:

a) Das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = (x^2 - 1)\sin(t) \quad , \quad x(0) = 0$$

hat eine eindeutige auf ganz $\mathbb{R}$ definierte, beschränkte Lösung.

b) Zu jedem $\tau \in \mathbb{R}$ und $\xi \in \mathbb{R}^2$ existieren die maximalen Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2y \\ \dot{y} &= 2x + 4x^3 \end{aligned}$$

zur Anfangsbedingung $\begin{pmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \end{pmatrix} = \xi$ auf ganz $\mathbb{R}$.

Aufgabe 5: **(4+1+1 Punkte)**

Es sei $A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Fundamentalmatrix e^{At} zu $\dot{x} = Ax$.

b) Bestimmen Sie die Lösung von

$$\dot{x} = Ax \quad , \quad x(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Zeigen Sie, dass die Ruhelage $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ stabil ist.