Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1: (1+5 Punkte)
Begründen Sie, dass das uneigentliche Riemann-Integral

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{x^6+3}\,\mathrm{d}x$$

existiert, und berechnen Sie I mithilfe des Residuensatzes.

Aufgabe 2: (2+1+3 Punkte)
Zeigen Sie, dass das Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y \quad , \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\sin(x)$$

auf dem Phasenraum $\mathbb{R}^2$

1. für alle Anfangswerte $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige Lösung $\phi_{z_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ besitzt;
2. Zeigen Sie, dass die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = y^2/2 - \cos(x)$ eine Erhaltungsgröße ist, also entlang der Lösungskurven ϕ_{z_0} konstant ist.
3. Bestimmen Sie, ob die Gleichgewichtslage $0 \in \mathbb{R}^2$ stabil oder sogar asymptotisch stabil ist.

Aufgabe 3: (6 Punkte)
Berechnen Sie, für welche Anfangswerte $x_0 \in \mathbb{R}^3$ die Lösung der linearen Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax \quad \text{mit der Systemmatrix } A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

für $t \to +\infty$ gegen die Ruhelage $r := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ konvergiert.

Hinweis: Sie müssen nicht die allgemeine Lösung der Differentialgleichung bestimmen, um die Aufgabe zu lösen.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4: (2+2+2 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Beweisen Sie die Aussage oder geben Sie ein Gegenbeispiel.

1. Stetige Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sind gleichmäßig stetig.
2. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : (c, d) \to (a, b)$ einer stetig differenzierbaren streng monotonen Funktion $f : (a, b) \to (c, d)$ ist ebenfalls stetig differenzierbar.
3. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/(1 + x^2)$ ist reell-analytisch, und ihre Potenzreihendarstellung bei $x = 0$ besitzt den Konvergenzradius 1.

Aufgabe 5: (1+1+2+2 Punkte)

Gegeben sei die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$. Zeigen Sie:

1. Der Konvergenzradius von f ist 1.
2. Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt $|f(z^{2^k})| \leq |f(z)| + k$.
3. Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und ρ eine 2^k-te Einheitswurzel. Dann gilt $\lim\limits_{t \to 1, 0<t<1} |f(t\rho)| = \infty$.
4. Für keinen Punkt z des Randes seines Konvergenzgebietes ist f auf eine offene Umgebung von z holomorph fortsetzbar.