## Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

*Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen zusammenhängenden Text zu begründen!*

Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

— — — — — —

In dieser Aufgabengruppe bezeichne $K_r(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ die offene Kreisscheibe um 0 mit Radius $r > 0$. Ferner sei $\mathbb{D} := K_1(0)$.

### Aufgabe 1 (3+3 Punkte)

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = g(t) f\big(x(t)\big)\,, \quad x(t_0) = x_0\,, \tag{1}$$

wobei $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$.

(a) Geben Sie ein Beispiel eines Anfangswertproblems der Form (1) an, sowie ein zugehöriges Intervall, so dass es zwei verschiedene Lösungen besitzt.

(b) Wir nehmen nun zusätzlich an, dass $f, g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass das Problem (1) dann lokal eindeutig lösbar ist.
***Hinweis:*** *Es sind hier Existenz und Eindeutigkeit zu zeigen.*

### Aufgabe 2 (6 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 1 \\ 1 & e^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Man zeige, dass die eindeutige Lösung von der Form

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{\begin{bmatrix} f(t) & g(t) \\ g(t) & f(t) \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

ist und bestimme die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Fortsetzung nächste Seite!

**Aufgabe 3** **(6 Punkte)**

Es seien $f$ und $g$ holomorph auf $K_2(0)$ und $f(\zeta) \neq 0$ für alle $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ und für jedes $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ sei $g(\zeta)/f(\zeta)$ reell und positiv. Zeigen Sie, dass $f$ und $g$ in $\mathbb{D}$ dieselbe Anzahl von Nullstellen (mit Vielfachheiten gezählt) besitzen.

**Aufgabe 4** **(4+2 Punkte)**

(a) Es sei $f$ holomorph in $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ mit einem Pol 1. Ordnung in $z = 0$. Weiter seien $\alpha \in (0, 2\pi)$, $\varepsilon > 0$ und $\gamma_\varepsilon : [0, \alpha] \to \mathbb{C}$, $\gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{it}$ für $t \in [0, \alpha]$. Zeigen Sie:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(\xi)\, d\xi = i\alpha \operatorname{res}(0, f)\,.$$

Hier bezeichnet $\operatorname{res}(0, f)$ das Residuum von $f$ im Punkt $z = 0$.

(b) Die stetige Funktion $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ sei holomorph in $\mathbb{D}$. Ferner seien $m_1$ und $m_2$ reell und positiv, derart, dass für alle $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ gilt

$$|f(\zeta)| \leq m_1 \text{ falls } \operatorname{Im}\zeta \geq 0 \qquad \text{und} \qquad |f(\zeta)| \leq m_2 \text{ falls } \operatorname{Im}\zeta \leq 0\,.$$

Beweisen Sie, dass $|f(0)| \leq \sqrt{m_1 m_2}$.
***Hinweis**: Betrachten Sie die Funktion $f(z)f(-z)$.*

**Aufgabe 5** **(3+3 Punkte)**

(a) Zeigen Sie: Es gibt keine holomorphe Funktion $f : \mathbb{D}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $f(z)^3 = z$ für alle $z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$.
***Hinweis**: Wenden Sie zunächst den Riemannschen Hebbarkeitssatz an.*

(b) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$, die den beiden Bedingungen $|f(z)| = 2$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$ und

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it})\, dt = 1$$

genügt?
***Hinweis**: Maximumprinzip für $\frac{1}{f}$ bzw. Minimumprinzip für $f$.*