Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen zusammenhängenden Text zu begründen!

Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

— — — — — —

Aufgabe 1 (1+3+2 Punkte)

In dieser Aufgabe bezeichne $B_r(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}$ für $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Ferner sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $f(z) := 6z^6 - 2z^2 + 1$ gegeben.

(a) Formulieren Sie den Satz von Rouché für ganze Funktionen.

(b) Zeigen Sie, dass $B_4(1) \subseteq f(B_1(0)) \subseteq B_8(1)$ gilt.
Hinweis: Für den Nachweis der ersten Inklusion könnte der in (a) formulierte Satz hilfreich sein.

(c) Entscheiden Sie mit Beweis, ob $f(B_1(0)) \cap \mathbb{R} = f(B_1(0) \cap \mathbb{R})$ gilt.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es sei $Q := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < 0 \text{ und } \operatorname{Im}(z) > 0\}$ der offene zweite Quadrant der komplexen Zahlenebene. Bestimmen Sie mit Begründung alle Abbildungen $f\colon Q \to \mathbb{C}$, die Q biholomorph auf die offene Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ abbilden mit $f(-1+i) = 0$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3 (3+3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = \cos(2t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Für welche $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ ist die maximale Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems $x(0) = a$, $x'(0) = b$ beschränkt? Begründen Sie Ihre Antworten.

(b) Geben Sie (mit Begründung) alle Paare $(c; d) \in \mathbb{R}^2$ an, für welche die zugehörige Differentialgleichung

$$x''(t) + cx'(t) + dx(t) = \cos(2t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

keine beschränkte reelle maximale Lösung besitzt.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Bestimmen Sie eine reelle Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$y(x)y'(x) + y(x)^2 + 2x + 5 = 0\,, \quad y(-4) = -2\,.$$

Wie groß kann das Intervall I maximal gewählt werden?

Hinweis: Eine Möglichkeit der Lösung besteht darin, zunächst einen integrierenden Faktor $u : \mathbb{R} \to]0; \infty[$ zu bestimmen, welcher nur von der Variablen x abhängt. Wir bezeichnen hierbei u als integrierenden Faktor, wenn die Differentialgleichung nach Multiplikation mit u exakt wird.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Bestimmen Sie (mit Nachweis) für jedes $a \in \mathbb{R}$ das globale Minimum der Funktion

$$f\colon H \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) := x^2 - ax + y^2, \qquad \text{wobei} \quad H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 1\}\,,$$

falls f ein solches Minimum besitzt. Geben Sie in diesen Fällen alle Stellen an, an denen das Minimum angenommen wird.