Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1:

Es sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto \dfrac{xt}{\sqrt{x^2+1}}$. Zeigen Sie:

a) Das Anfangswertproblem
$$x' = f(t, x) \quad , \quad x(0) = 1$$
hat eine eindeutige maximale Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}$.

b) Für das maximale Lösungsintervall gilt: $I = \mathbb{R}$.

c) Für alle $t \geq 0$ ist $\lambda(t) \in [1, 1 + \frac{t^2}{2}]$.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

Gegeben sei die matrixwertige Funktion $A :]-1, 1[\to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $t \mapsto \begin{pmatrix} 2t & t \\ 0 & \frac{2t}{t^2-1} \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem
$$x'(t) = A(t)x(t) \quad , \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
eine eindeutige maximale Lösung besitzt und berechnen Sie diese. (6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:
Berechnen Sie für $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto 2e^{2it}$ und für $\eta : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto i + e^{-it}$ die Kurvenintegrale:

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{iz^2} - 1}{z^2} dz;$

b) $\displaystyle\int_\eta \frac{e^z}{(z-i)^3} dz;$

c) $\displaystyle\int_\gamma e^{\frac{1}{z}} dz.$

(6 Punkte)

Aufgabe 4:
Es sei $f : \mathbb{C}\backslash\{-1, 1\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \dfrac{z^2}{z^2 - 1}$.

a) Bestimmen Sie für jede der Singularitäten von f den Typ und berechnen Sie das Residuum.

b) Zeigen Sie, dass für $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$ die Einschränkung $f_U : U \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \dfrac{z^2}{z^2 - 1}$ eine holomorphe Stammfunktion besitzt.

(6 Punkte)

Aufgabe 5:
Entscheiden Sie, bei welchem der drei Paare von offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ es eine biholomorphe Abbildung zwischen den beiden Mengen gibt:

a) $\mathbb{C}\backslash\{2\}$ und $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$;

b) $\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$ und $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$;

c) $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} : -1 < \mathrm{Im}(z) < 1\}$ und $\mathbb{C}$.

(6 Punkte)