## Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten. Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text in ganzen Sätzen zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben. Die Punkte für die Teilaufgaben sind jeweils in Klammern angegeben.

### Aufgabe 1:

a) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist das Polynom $u(x, y) = x^2 + 2axy + by^2$ der Realteil einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{C}$? (3 Punkte)

b) Bestimmen Sie für jedes solche Paar $(a, b)$ den Imaginärteil aller zugehörigen holomorphen Funktionen. (3 Punkte)

### Aufgabe 2:

Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, $n \in \mathbb{N}_0$ und $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ die Kurve mit $\gamma(t) = e^{-it}$. Weiterhin bezeichne $P_n(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ das $n$-te Taylorpolynom von $f$ mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$. Zeigen Sie, dass für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| > 1$ gilt:

$$P_n(w) = \frac{w^{n+1}}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}(z-w)} dz\,.$$

(6 Punkte)

Hinweis: Man schreibe den im Integranden auftretenden Faktor $\frac{1}{z-w} = -\frac{1}{w[1-(z/w)]}$ und verwende dann die geometrische Reihe.

### Aufgabe 3:

Sei $L \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$(1-x^2)\, y''(x) - 2x\, y'(x) + L\, y(x) = 0; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1\,. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie mittels Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$, dass (1) eine Lösung $y\colon ]-1, 1[ \to \mathbb{R}$ besitzt. (5 Punkte)

b) Ist die Lösung aus (a) auf $]-1, 1[$ eindeutig bestimmt? (1 Punkt)

Hinweis zu a): Bestimmen Sie zunächst durch formale Differentiation der Potenzreihe die Koeffizienten $c_j$. Untersuchen Sie dann den Konvergenzradius der so definierten Potenzreihe. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die formale Differentiation nun gerechtfertigt?

Fortsetzung nächste Seite!

**Aufgabe 4:**

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$u'' = -u' - \frac{5}{2}u\,.$$

(2 Punkte)

b) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$xy''(x) + \frac{1+\sqrt{x}}{2}\,y'(x) + \frac{5}{8}\,y(x) = 0 \quad \text{für } x > 0\,.$$

Durch die Substitution $y(t^2) = u(t)$ $(t > 0)$ geht die Differentialgleichung in eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten über. Wie lautet diese? Geben Sie die allgemeine reelle Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung an.

(4 Punkte)

**Aufgabe 5:**

Eine Version des Banachschen Fixpunktsatzes lautet:
*Seien $(X,d)$ metrischer Raum, $\emptyset \neq A \subset X$ und $T\colon A \to X$ mit*
*(1) $T(A) \subset A$ (2) $A$ abgeschlossen (3) $T$ Kontraktion (4) $(X,d)$ vollständig.*
*Dann besitzt $T$ genau einen Fixpunkt.*

a) Erklären Sie die in der Formulierung des Satzes auftretenden Voraussetzungen

i) $T$ ist Kontraktion

ii) der metrische Raum $(X,d)$ ist vollständig.

(2 Punkte)

b) Beweisen Sie die Eindeutigkeit des Fixpunktes.

(1 Punkt)

Seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ und $(t_0, x_0) \in D$. Im Folgenden betrachten wir das **Anfangswertproblem**

$$x' = f(t,x); \quad x(t_0) = x_0\,.$$

c) Formulieren Sie die Picard-Lindelöf Bedingung an $f$, d.h. die Voraussetzungen an $f$, unter denen mit dem Satz von Picard-Lindelöf auf die (lokale) Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Anfangswertproblems geschlossen werden kann. (1 Punkt)

d) Erläutern Sie kurz, wie man die Existenz einer Lösung des Anfangswertproblems unter der Voraussetzung der Picard-Lindelöf Bedingung aus dem Banachschen Fixpunktsatz schließen kann. Gehen Sie hierbei insbesondere darauf ein, wie das Anfangswertproblem in eine äquivalente Fixpunktgleichung umformuliert werden kann und warum die Picard-Lindelöf Bedingung den Nachweis der Kontraktionseigenschaft ermöglicht. (2 Punkte)