Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten. Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text in ganzen Sätzen zu versehen; Lösungen, die nur aus Rechnungen bestehen, erhalten keinen Punkt. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben. Die Punkte für die Teilaufgaben sind jeweils in Klammern angegeben.

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie explizit alle ganzen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $|f(z) - 3| \geq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
(3 Punkte)

b) Gibt es eine holomorphe Funktion f auf einer Umgebung der 0, so dass $f^{(n)}(0) = n^{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt?
(3 Punkte)

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Rouché die Anzahl der Nullstellen der Funktion $f(z) = e^z + 3z^5$ in der offenen Einheitskreisscheibe $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Zeigen Sie weiter, dass genau zwei verschiedene dieser Nullstellen positiven Imaginärteil haben und eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ liegt.
(6 Punkte)

Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie Lage und Ordnung der Pole der meromorphen Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1 + 2z^2 + z^4}.$$

(1 Punkt)

b) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + 2x^2 + x^4}\, dx$$

mit Hilfe des Residuensatzes.

(3 Punkte)

c) Geben Sie die Laurent-Reihe in einem der Pole an.
(2 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(t) \to 0$ für $t \to \infty$.

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) + 4y(t) + f(t) = 0.$$

(4 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass für jede Lösung y dieser Differentialgleichung gilt

$$y(t) \to 0 \quad \text{für} \quad t \to \infty.$$

(2 Punkte)

Aufgabe 5:

Es sei das (autonome) System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - y + 3, \\ \dot{y} &= x^2 - 4y - 20 \end{aligned}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte des Systems.

(2 Punkte)

b) Untersuchen Sie die stationären Punkte durch Linearisieren auf Stabilität.

(4 Punkte)