Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte

Aufgabe 1:

Geben Sie jeweils alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit den angegebenen Eigenschaften an und begründen Sie jeweils, dass es über die von Ihnen angegebenen Funktionen hinaus keine weiteren mit diesen Eigenschaften gibt.

a) $f'(z) = zf(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $f(0) = 1$

b) $f(f(z)) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$, $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$

Aufgabe 2:

Sei G ein beschränktes nicht–leeres Gebiet in $\mathbb{C}$ und seien $f, g : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen, deren Einschränkungen auf G holomorph sind. Zeigen Sie: Gilt $|f(z)| = |g(z)|$ für alle $z \in \partial G$ und haben f und g keine Nullstellen in $\overline{G}$, so gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$, so dass $f = \lambda g$.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^{2n}} = \frac{\pi}{n \sin(\frac{\pi}{2n})}$$

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Differenzialgleichung

$$e^{-x}(x + y) - e^{-x}(y - x)y' = 0.$$

a) Untersuchen Sie, ob die Differenzialgleichung exakt ist oder ob wenigstens ein integrierender Faktor existiert.

b) Bestimmen Sie jeweils die maximal fortgesetzte Lösung der Differenzialgleichung, die der folgenden Anfangsbedingung genügt:

   i) $y(1) = 0$

   ii) $y(-1) = 1$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Gegeben sei das Differenzialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + 2e^{2t}y \\ \dot{y} &= \qquad\ -2y.\end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differenzialgleichungssystems.

b) Geben Sie alle Ruhelagen des Systems an und untersuchen Sie diese auf Attraktivität.