Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen zusammenhängenden Text zu begründen. Insgesamt werden maximal 30 Punkte vergeben.

Aufgabe 1:

Man bestimme alle Lösungen des Systems von Differentialgleichungen

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x\,.$$

Hat das System eine stabile oder eine asymptotisch stabile Gleichgewichtslösung?

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\dot{x} = p(x)x$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Man zeige: Ist $p(0) > 0$, so ist 0 ein nichtstabiles Gleichgewicht.

(b) Für $\xi > 0$ beweise man: ξ ist genau dann ein asymptotisch stabiles Gleichgewicht, wenn die Funktion p für ein $r > 0$ die folgenden Bedingungen erfüllt: $p(x) > 0$ für $\xi - r < x < \xi$ und $p(x) < 0$ für $\xi < x < \xi + r$.

(7 Punkte)

Aufgabe 3:

Man bestimme das Volumen des Bereichs

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\,,\, y \geq 0\,,\, z \geq 0\,,\, x + 2y + 3z \leq 1\}\,.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4:

Es sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine nichtkonstante, holomorphe Funktion auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, $G \neq \emptyset$. Sei $K \subset G$ eine kompakte Kreisscheibe mit Radius $r > 0$, und setze $M := \sup\{|f(z)| : z \in K\}$.

a) Man beweise mit Hilfe der Integralformel von Cauchy, dass alle $z \in K$ mit $|f(z)| = M$ auf dem Rand von K liegen.

b) Man zeige weiterhin, dass in allen $z \in K$ mit $|f(z)| = M$ die Ableitung nicht verschwindet: $f'(z) \neq 0$.

Hinweis: Man betrachte kleine Kreisscheiben um z.

(7 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Für die Funktion

$$f(z) = \frac{2}{z(z^2+1)}$$

bestimme man die Laurentreihen (Laurententwicklung) in den Bereichen $A_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \frac{1}{2}\}$, $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-i| < 1\}$, $A_3 = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z-i| < 3\}$, und berechne längs $\alpha(t) = \frac{1}{2}e^{it}$ und $\beta(t) = 4e^{i4t}$, $t \in [0, 2\pi]$, die Wegintegrale $\int_\alpha f(z)dz$, $\int_\beta f(z)dz$.

Hinweis: Partialbruchzerlegung. (6 Punkte)