Thema Nr. 3 (Aufgabengruppe)

Es sind <u>alle</u> Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie eine stetige Funktion $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derart, dass das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = 0$$

eine auf einem offenen Intervall um 0 eindeutig bestimmte Lösung hat, das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = 1$$

aber nicht.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\ddot{x} = x + 3y$$
 $\dot{y} = \dot{x}$
 $x(0) = 5, \dot{x}(0) = 0, y(0) = 1.$

Aufgabe 3:

Gegeben sei die skalare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x} = 2x - 4x^3.$$

- a) Bestimmen Sie alle stationären Lösungen dieser Differentialgleichung.
- b) Bestimmen Sie eine Erhaltungsgröße (ein erstes Integral) für diese Differentialgleichung.
- c) Zeigen Sie, dass alle maximalen Lösungen dieser Gleichung auf ganz $\mathbb R$ existieren.
- d) Skizzieren Sie das Phasenportrait für diese Differentialgleichung. Begründen Sie mit dessen Hilfe, welche der stationären Lösungen stabil sind, welche instabil. Besitzt die Differentialgleichung nicht konstante, periodische Lösungen?

Aufgabe 4:

Sei $\mathbb{E}:=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$ der offene Einheitskreis um 0 in $\mathbb{C}.$

a) Gibt es eine holomorphe Funktion $f: \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z)^3 = z^2, \ z \in \mathbb{E}?$$

b) Gibt es eine holomorphe Funktion $f: \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ mit

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n^4}, \ n \in \mathbb{N}, \ n \ge 2?$$

c) Gibt es eine holomorphe Funktion $f: \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(0) = 2i$$
, $\lim_{|z| \to 1} |f(z)| = 1$?

Die Antworten sind sorgfältig zu begründen.

Aufgabe 5:

Sei $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Zeigen Sie, dass f eine nicht konstante, affine Funktion ist, d. h., es gibt $a,b\in\mathbb{C}$ mit $a\neq 0$ und $f(z)=a\,z+b,\,z\in\mathbb{C}$. (Hinweis: Untersuchen Sie zunächst die Art der Singularität von f in ∞ .)