Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Funktion $f(z) := \frac{z+1}{2z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

a) Man bestimme das Bild der Einheitskreislinie unter f.

b) Man bestimme das Bild der punktierten offenen Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ unter f.

Aufgabe 2:

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei z_0 eine Singularität der holomorphen Funktionen $f, g : G \setminus \{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$. Es existiere ein $c > 0$ mit $|f(z)| \leq c|g(z)|$, $z \in G \setminus \{z_0\}$. Man zeige:

a) Ist z_0 eine hebbare Singularität von g, so ist z_0 auch eine hebbare Singularität von f.

b) Ist z_0 eine Polstelle von f, so ist z_0 auch eine Polstelle von g.

Aufgabe 3:

Gegeben sei das Gebiet $G := \mathbb{C} \setminus \{iy \mid y \geq 0\}$. Auf welches der folgenden Gebiete läßt sich G biholomorph abbilden?

a) $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}$;

b) $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| > 1\}$.

Man gebe im Falle der Existenz jeweils eine solche Abbildung an.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Der topologische Abschluss M der Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}$ sei kompakt. Man zeige:

a) Eine Lösung des Anfangswertproblems $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$ verläuft für jeden Punkt $x_0 \in M$ vollständig in M.

b) Das Anfangswertproblem $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$ ist für jeden Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ global lösbar.

Aufgabe 5:

Man untersuche die Nulllösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

für jedes $a \in \mathbb{R}$ auf Stabilität.