Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

a) Man zeige $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

b) Man bestimme die Lage und die Art der Singularitäten von

$$f(z) = z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z^2+1}$$

und zeige dann

$$\oint\limits_{|z|=2} f(z)dz = \frac{\pi i}{12}.$$

Aufgabe 2:
Man zeige:

$$f(z) = e^z + 3z^3$$

hat auf der Kreisscheibe $|z| < 1$ genau drei Nullstellen. Davon ist genau eine reell, und die anderen sind zueinander konjugiert komplex.

Aufgabe 3:
Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ sei holomorph, und es gelte

$$|f(z)| \geq |e^z| \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Man zeige, dass f in den Punkten aus $\mathbb{Z}$ holomorph ergänzbar ist und dass

$$f(z) = Ce^z$$

mit einer Konstanten C gilt.

Aufgabe 4:
Man bestimme alle beschränkten Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = 3(xy)^2 - 12x^2$$

mit maximalem Definitionsbereich.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Gegeben ist das autonome System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + x^2 + y^2 \\ bx - y + xy \end{pmatrix}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \leq 0$.

a) Man zeige, dass im Fall $a < 0$ die Null-Lage asymptotisch stabil ist.

b) Man beweise oder widerlege, dass die Behauptung in a) auch im Fall $a = 0$ gilt.