Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung: *Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Begründen Sie alle Schlussweisen und Rechenschritte durch einen kurzen Text.*

Aufgabe 1: Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit der Eigenschaft

$$G = \{\overline{z} \mid z \in G\}.$$

Zeigen Sie, dass folgende Aussagen für eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ äquivalent sind:

i) Es gilt $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ für alle $z \in G$.

ii) Es gilt $f(G \cap \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g : G \to \mathbb{C}$, $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$

Aufgabe 2: Berechnen Sie für $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 1$ das Integral:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{b + \cos t}.$$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3: Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Wie üblich bezeichne $f^{(k)}$ die k-te Ableitung von f.

i) Zeigen Sie, dass die Funktionenreihe

$$g(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z)}{k!}$$

lokal gleichmäßig konvergiert und durch $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto g(z)$ eine ganze Funktion definiert wird.

ii) Es sei

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

die Potenzreihenentwicklung von f im Nullpunkt. Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von g im Entwicklungspunkt $z_0 = -1$ und folgern Sie, dass

$$g(z) = f(z+1)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

<u>Hinweis zu ii):</u> Für $k \geq 0$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt: $f^{(k)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n k! \binom{n}{k} z^{n-k}$.

Aufgabe 4: Es bezeichne v das durch

$$v : \mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad v\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin x_2}{\cos x_2} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

definierte Vektorfeld.

i) Bestimmen Sie für $c > 0$ eine Integralkurve des Vektorfelds durch den Punkt $\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

ii) Entscheiden Sie, ob der Ursprung im $\mathbb{R}^2$ ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt des zugehörigen autonomen Systems $y' = v(y)$ ist.

Aufgabe 5: Es bezeichne $\langle .,. \rangle$ das kanonische euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$. Es sei $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, das $\langle x, v(x) \rangle \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt. Zeigen Sie, dass jede Integralkurve des Vektorfeldes, die für ein $t_0 \in \mathbb{R}$ definiert ist, auch für alle $t > t_0$ existiert.