Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe (5 Punkte)

a) Welche Differentialgleichung erfüllt die Funktion $u = \frac{y}{x}$, wenn die Funktion y der Differentialgleichung $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ genügt?

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{y}{x}\left(1 + ln\,\frac{y}{x}\right), \; y(1) = 2.$$

2. Aufgabe (10 Punkte)

Untersucht wird die linearisierte Stabilität der 1-periodischen Lösung $x(t) = \sin 2\pi t$ der Differentialgleichung

$$(*) \qquad \dot{x} = -x^3 + \sin^3 2\pi t + 2\pi \cos 2\pi t.$$

a) Man zeige, dass $x(t) = \sin 2\pi t$ eine Lösung der Differentialgleichung $(*)$ ist.

b) Machen Sie den Ansatz $x = \sin 2\pi t + y$ und leiten Sie die Differentialgleichung her, der y genügt, falls x Lösung der Differentialgleichung $(*)$ ist.

c) Durch Linearisierung der Differentialgleichung für y um die Lösung $y(t) \equiv 0$ beweise man die Stabilität der Lösung $x(t) = \sin 2\pi t$ der Differentialgleichung $(*)$.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Es besitze f in c eine isolierte Singularität und es sei P ein beliebiges nicht konstantes Polynom. Zeigen Sie, dass f und $P \circ f$ in c denselben Typ von isolierter Singularität haben.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\overline{f(\overline{z})} = f(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Hinweis: $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ ist holomorph - warum?

Fortsetzung nächste Seite!

5. Aufgabe (6 Punkte)

Es seien $R > 1$ und $f\colon \{ z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < R \} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. f habe im Nullpunkt einen Pol 1. Ordnung mit Residuum $c \neq 0$.

a) Man beweise, dass folgender Limes existiert:

$$I_0 := \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{1} f(x)\,dx \right)$$

Dabei seien die beiden Integrale über die Intervalle [-1, -ε] bzw. [ε, 1] gebildet.

b) Es sei α_+ der Weg in der komplexen Ebene von -1 bis + 1 längs des oberen Einheitshalbkreises (im Uhrzeigersinn) und α_- der Weg von -1 bis +1 längs des unteren Einheitshalbkreises (im Gegenuhrzeigersinn). Es seien

$$I_+ := \int_{\alpha_+} f(z)dz, \ I_- := \int_{\alpha_-} f(z)dz.$$

Man berechne $I_+ - I_-$ und beweise die Formel

$$I_0 = \frac{1}{2}(I_+ + I_-)$$

Hinweis: Man betrachte sowohl in Teilaufgabe a) wie auch in Teilaufgabe b) zunächst den speziellen Fall $f(z) = \frac{1}{z}$ und führe dann den allgemeinen Fall auf diesen zurück.