Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge sprachlich angemessen, nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben. Die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

Wir betrachten die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) = x^n\, e^{-nx}\,.$$

a) Untersuchen Sie die Funktionenfolge auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

b) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx\,.$$

Begründen Sie, warum man Integration und Grenzwertbildung vertauschen darf.

c) Berechnen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Integral

$$\int_0^\infty f_n(x)\, dx\,.$$

(2 + 2 + 2 Punkte)

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie alle in $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ holomorphen Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$, die beide Bedingungen $f(0) = 1$ und $|f(z)| \geq 1$ für alle $z \in D$ gleichzeitig erfüllen.

b) Gegeben seien die Potenzreihen F und G mit

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad \text{und} \quad G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}.$$

Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius von F und G.

Fertigen Sie eine Zeichnung an, aus der die Lagen der offenen Konvergenzkreisscheibe D_F von F und der offenen Konvergenzkreisscheibe D_G von G hervorgehen.

Zeigen Sie: Für alle $z \in D_F \cap D_G$ gilt $F(z) = G(z)$.

(2 + 4 Punkte)

Aufgabe 3:

Es sei

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{(z+1)^3} \exp\left(\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)\right).$$

Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$g_k : \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto (z+1)^k f(z)$$

und

$$h_k : \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto (z-1)^k f(z).$$

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Es gibt ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit folgender Eigenschaft: Für jedes $w \in \mathbb{C}$ gibt es eine Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}\setminus\{-1, 1\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = -1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} g_{k_0}(w_n) = w$.

b) Für jedes $k_0 \in \mathbb{N}$ und für jedes $w \in \mathbb{C}$ gibt es eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}\setminus\{-1, 1\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} h_{k_0}(z_n) = w$.

(2 + 4 Punkte)

Aufgabe 4:

a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, so dass $\varphi(t) := \arctan t$ auf ganz $\mathbb{R}$ eine Lösung der autonomen Differentialgleichung $x' = f(x)$ ist. Zeigen Sie, dass f die Nullstellen $\pm\frac{\pi}{2}$ hat.

b) Bestimmen Sie explizit eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den in a) genannten Eigenschaften und zeigen Sie, dass durch diese Eigenschaften die Restriktion $f|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ eindeutig festgelegt ist.

c) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den in a) genannten Eigenschaften. Zeigen Sie: Für jede Lösung $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $x' = f(x)$ zum Anfangswert $\psi(0) = x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ gilt

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t) = \frac{\pi}{2}.$$

d) Geben Sie zwei Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den in a) genannten Eigenschaften an, so dass die Ruhelage $\frac{\pi}{2}$ von $x' = f(x)$

i) im ersten Fall instabil

ii) im zweiten Fall asymptotisch stabil

ist, und begründen Sie kurz, dass diese das Gewünschte leisten. (Hierfür können z. B. auch Skizzen der Graphen der Lösungen unterstützend herangezogen werden.)

(1 + 2 + 1 + 2 Punkte)

Aufgabe 5:

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \frac{3x^2 - y^2}{2xy}, \quad y(2) = 4.$$

a) Beweisen Sie, dass das Anfangswertproblem eine eindeutige maximale Lösung besitzt.

b) Geben Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems mit maximalem Existenzintervall an.
Hinweis: Substitution $z = \frac{y}{x}$.

(2 + 4 Punkte)