Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge sprachlich angemessen, nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben. Die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

Sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x > 0,\ y > 0,\ xy \leq 16\}$ und sei

$$f \colon D \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 8xy.$$

a) Begründen Sie, warum f auf D ein globales Minimum annimmt.
Hinweis: Betrachten Sie die Menge $D \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq \varepsilon, y \geq \varepsilon\}$ für ein geeignetes $\varepsilon > 0$.

b) Finden Sie alle Punkte in D, an denen f das globale Minimum annimmt.

(3 + 3 Punkte)

Aufgabe 2:

Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|\mathrm{Re}\ z|} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}.$$

a) Es sei $R > 0$. Zeigen Sie $z^2 + R^2 = 2z \cdot \mathrm{Re}\ z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = R$.

b) Es sei $R > 0$ und $g_R(z) := (z^2 + R^2) \cdot f(z)$. Zeigen Sie, dass $|g_R(z)| \leq 2R$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq R$ gilt.

c) Folgern Sie mittels b), dass f die Nullfunktion ist.

d) Geben Sie eine in der offenen rechten Halbebene $RH := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\ z > 0\}$ holomorphe, nicht-konstante Funktion h an mit $|h(z)| \leq \frac{1}{\mathrm{Re}\ z}$ für alle $z \in RH$.

(1 + 2 + 2 + 1 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0, 2\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{z(z-2)^2} + z^2 \exp(1/z),$$

und sei $U = \{z \in \mathbb{C} \colon 0 < |z| < 2\}$.

a) Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklung mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ der Funktion f im Gebiet U. Bestimmen Sie die Art der isolierten Singularität bei $z_0 = 0$.

b) Berechnen Sie für $\gamma \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto 3e^{-2it}$, das Kurvenintegral

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$$

c) Bestimmen Sie alle $c \in \mathbb{C}$, so dass die Funktion $g(z) = f(z) + \frac{c}{z}$ auf U eine Stammfunktion besitzt.

(2,5 + 2,5 + 1 Punkte)

Aufgabe 4:

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(2 - x_1)\, e^{x_2}, \\ \dot{x}_2 &= (1 - x_1)\, x_2, \end{aligned} \qquad x(0) = (1, 1).$$

Zeigen Sie:

a) Das Anfangswertproblem hat eine eindeutige maximale Lösung $x : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$.

b) Für alle $t \in I$ gilt $0 < x_1(t) < 2$.

c) $I = \mathbb{R}$.

d) $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = (2, 0)$.

(1 + 2 + 1,5 + 1,5 Punkte)

Aufgabe 5:

Für

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto \exp\left(x^2+y^2\right) \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix},$$

betrachten wir das autonome zweidimensionale System

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = F(x,y).$$

a) Geben Sie mit Nachweis ein nicht konstantes Erstes Integral (Erhaltungsgröße) des Systems an.

b) Bestimmen Sie für $r > 0$ die eindeutige maximale Lösung des Systems mit dem Anfangswert

$$(x,y)(0) = (r,0) \in \mathbb{R}^2.$$

c) Geben Sie für jedes $\varepsilon > 0$ eine stetig differenzierbare Funktion $F^\varepsilon\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\max_{(x,y)\in[-1,1]^2} |F_i^\varepsilon(x,y) - F_i(x,y)| \leq \varepsilon \quad \text{für } i = 1,2$$

an, so dass die Ruhelage $(0,0)$ des Systems

$$\begin{aligned} x' &= F_1^\varepsilon(x,y) \\ y' &= F_2^\varepsilon(x,y) \end{aligned}$$

asymptotisch stabil ist.

(1 + 2 + 3 Punkte)