Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge sprachlich angemessen, nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben. Die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

**Aufgabe 1:**

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine nichtleere, offene und beschränkte Menge mit Volumen $\mathrm{Vol}(M) := \int_M 1\,dx = \int_M 1\,d(x_1, x_2, x_3)$. Der Schwerpunkt $S_M$ von $M$ ist definiert als

$$S_M = \frac{1}{\mathrm{Vol}(M)}\Big(\int_M x_1\,dx, \int_M x_2\,dx, \int_M x_3\,dx\Big) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Zeigen Sie (z. B. mit Hilfe des Transformationssatzes), dass für bezüglich des Ursprungs punktsymmetrisches $M$, d. h. $M = -M$ mit $-M := \{x \in \mathbb{R}^3 : -x \in M\}$, der Schwerpunkt von $M$ genau der Ursprung ist.

b) Bestimmen Sie das Volumen sowie den Schwerpunkt der Menge

$$M = \Big\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1 - x_3^2\Big\}.$$

**(3 + 3 Punkte)**

**Aufgabe 2:**

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Es gibt eine nicht-konstante holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ mit $f(G) \subseteq \partial B_1(0)$, wobei $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

b) Ist $G = \mathbb{C}$ und $|f(z)| \geq 1$ für alle $z \in G$, so ist $f$ konstant.

c) Für $G = \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ und

$$f(z) = \frac{z^3 - z^2(1+2i) + z - 1 - 2i}{z^2 + 1}$$

hat $f$ bei $z = i$ eine hebbare Singularität.

d) Sei $G = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ und $f(z) = z^8 - 3z - 1$. Dann gilt $\inf_{z \in G} |f(z)| > 0$.

**(1,5 + 1,5 + 1,5 + 1,5 Punkte)**

**Aufgabe 3:**

a) Begründen Sie kurz, dass jedes nicht-konstante Polynom $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ surjektiv ist.

b) Geben Sie explizit eine Folge ganzer surjektiver Funktionen $p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an, die gleichmäßig auf jedem Kompaktum in $\mathbb{C}$ gegen eine ganze Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ konvergiert, die nicht konstant und nicht surjektiv ist.

c) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit $f(0) = 0$ und mit folgender Eigenschaft: Für jedes $R > 0$ existiert ein $r > 0$, so dass $|f(z)| \geq R$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = r$. Beweisen Sie, dass $f$ surjektiv ist.

**(1 + 2 + 3 Punkte)**

**Aufgabe 4:**

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit

$$g(x) = x^2 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| > 1.$$

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= -g'(x(t)). \end{aligned}$$

a) Begründen Sie, dass zu beliebigen Anfangswerten jeweils eine eindeutige maximale Lösung des Systems auf ganz $\mathbb{R}$ existiert.

b) Zeigen Sie: Wenn $0 \in \mathbb{R}$ die einzige Nullstelle von $g$ ist, dann hat das Differentialgleichungssystem im Ursprung eine Ruhelage und diese ist stabil.

**(3 + 3 Punkte)**

**Aufgabe 5:**

Bestimmen Sie jeweils eine maximal fortgesetzte reellwertige Lösung der folgenden Anfangswertprobleme:

a) $x' + x - te^{-t} - 1 = 0$ mit $x(0) = 1$.

b) $(x't + x)e^{tx} + 1 = 0$ mit $x(1) = 0$.

**(3 + 3 Punkte)**