

Thema Nr. 2
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge sprachlich angemessen, nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben. Die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

Gegeben seien die Punkte

$$z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad e_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^2$. Sei D das offene Dreieck mit den Eckpunkten z_0, z_1, z_2 und sei S das offene Dreieck mit den Eckpunkten e_0, e_1, e_2 .

- a) Geben Sie einen Diffeomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\Phi(S) = D$ an.
- b) Bestimmen Sie das Integral

$$\frac{1}{49} \int_D [3(u-1) - (v-1)] d(u, v).$$

(3 + 3 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Sei $d \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- i) f ist ein Polynom vom Grad höchstens d .
- ii) Es gibt ein $C > 0$ mit $|f(z)| \leq C(|z|^d + 1)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei $\dot{\mathbb{E}} := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ die punktierte offene Einheitskreisscheibe.

- a) Zeigen Sie, dass durch

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{z^2} + \sum_{k=0}^{\infty} z^{k!}$$

eine holomorphe Funktion $f : \dot{\mathbb{E}} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert wird.

- b) Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklung dieser Funktion f in $\dot{\mathbb{E}}$ um 0. Welche Art von Singularität hat f in 0? Begründen Sie Ihre Antwort.
c) Geben Sie den Wert des Integrals

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

für alle stetigen und stückweise differenzierbaren geschlossenen Integrationswege γ in $\dot{\mathbb{E}}$ an.

(3 + 2 + 1 Punkte)

Aufgabe 4:

Gegeben sei die reelle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$x'' + ax' + bx = \alpha(t)$$

mit stetiger rechter Seite $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Es gelte $a^2 = 4b + 4$. Zeigen Sie, dass mindestens eine der Funktionen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto e^t + e^{5t} - te^{5t} + \sin(t)$$

und

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto e^t + 2e^{5t} - 3te^{5t} + \sin(t)$$

keine Lösung der Differentialgleichung ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und sei

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, x = (x_1, x_2) \mapsto (x_2, -g(x_1)).$$

Betrachtet wird das Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$x' = F(x).$$

- a) Sei $a \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$x' = F(x), \quad x(0) = a$$

eine eindeutig bestimmte maximale Lösung besitzt.

- b) Es gelte jetzt zusätzlich

$$g(0) = 0 \quad \text{und} \quad ug(u) > 0 \text{ für alle } u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Zeigen Sie, dass der Ursprung ein stabiler stationärer Punkt ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion

$$V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} g(s)ds.$$

(2 + 4 Punkte)