

Thema Nr. 1
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge sprachlich angemessen, nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben. Die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

- a) Es sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und

$$\int_0^1 |f(x)|^n dx \leq 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in [0, 1]$.

Hinweis: Widerspruchsbeweis!

- b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- i) Genügen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jeweils einer globalen Lipschitz-Bedingung, so erfüllt auch die Funktion $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine globale Lipschitz-Bedingung.
- ii) Es seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f \cdot g$ sei Lipschitz-stetig. Dann sind auch f und g Lipschitz-stetig.

(3 + (2 + 1) Punkte)

Aufgabe 2:

Es sei f eine holomorphe Funktion auf der Kreisscheibe $K_2(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ und f sei reellwertig auf der Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

- a) Es sei $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1/2\}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $z \mapsto \overline{f(1/\bar{z})}$ holomorph auf U ist.
- b) Zeigen Sie mithilfe von a), dass es eine ganze Funktion $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, die in $K_2(0)$ mit f übereinstimmt.
- c) Zeigen Sie mithilfe von b), dass f konstant ist.

(2 + 2 + 2 Punkte)

Aufgabe 3:

Im Folgenden sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe der komplexen Ebene.

- a) Es sei $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorph. Beweisen Sie, dass $|f'(0)| \leq 1$.
b) Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $0 \in G$. Untersuchen Sie die Menge

$$M := \{g'(0) : g : G \rightarrow G \text{ holomorph mit } g(0) = 0\}$$

auf Beschränktheit und auf Offenheit.

Hinweis: Fallunterscheidung: $G = \mathbb{C}$ und $G \neq \mathbb{C}$. Für $G \neq \mathbb{C}$ beachte man a).

(2 + 4 Punkte)

Aufgabe 4:

a)

- i) Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(y) = 2y^3$ und $y_0 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die eindeutig bestimmte maximale Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(y)$, $y(0) = y_0$.
ii) Bestimmen Sie alle $x_1 \in \mathbb{R}$ derart, dass es genau eine differenzierbare Funktion $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, die den Bedingungen

$$x''(t) = 2x'(t)^3 \quad \text{für alle } t \in [0, 1] \quad \text{und } x(0) = 0 \text{ sowie } x(1) = x_1$$

genügt.

Hinweis: Teil i)

- b) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x' = f(t, x) \tag{1}$$

mit einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, die bzgl. x Lipschitz-stetig sei. Für je zwei Lösungen $\phi_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\phi_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ von (1) mit $I := I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ sei für alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die Funktion $c_1\phi_1 + c_2\phi_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ebenfalls eine Lösung von (1). Zeigen Sie, dass es eine stetige Funktion $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt derart, dass $f(t, x) = A(t)x$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

((1,5 + 2,5) + 2 Punkte)

Aufgabe 5:

- a) Es sei $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $L > 0$ mit $g'(t) \leq -Lg(t)$ für alle $t \in [0, +\infty)$. Zeigen Sie, dass $g(t) \leq g(0)e^{-Lt}$ für alle $t \in [0, \infty)$.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $t \mapsto e^{Lt}g(t)$.

- b) Im Folgenden bezeichnet $\|\cdot\|$ die euklidische Norm und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt des $\mathbb{R}^n$.

Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $0 \in D$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $f(0) = 0$. Weiter seien a, b und c positive Konstanten sowie $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass

$$a\|x\|^2 \leq V(x) \leq b\|x\|^2 \quad \text{und} \quad \langle \text{grad } V(x), f(x) \rangle \leq -c\|x\|^2$$

für alle $x \in D$. Zeigen Sie, dass es positive Konstanten α, η und K gibt, derart, dass jede maximale Lösung ϕ des Systems $x' = f(x)$ mit $\|\phi(0)\| < \eta$ mindestens auf $[0, +\infty)$ existiert und dass

$$\|\phi(t)\| \leq Ke^{-\alpha t} \quad \text{für alle } t \geq 0$$

gilt.

Hinweis: Wenden Sie Teil a) auf die Funktion $V \circ \phi$ an.

(2 + 4 Punkte)