Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge sprachlich angemessen, nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben. Die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

a) Sei

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \frac{1}{3}y^3 + x^2y - xy.$$

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von F und entscheiden Sie begründet, welche lokale Maxima bzw. lokale Minima sind.

b) Bestimmen Sie alle stationären Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 - x + y^2, \\ \dot{y} &= y - 2xy. \end{aligned}$$

Entscheiden Sie begründet, welche stationären Lösungen stabil bzw. instabil sind.

(3 + 3 Punkte)

Aufgabe 2:

a) Entscheiden Sie, ob die Funktion $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \cos(z)$ beschränkt auf $\mathbb{C}$ ist. Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Überprüfen Sie, in welchen Punkten $z \in \mathbb{C}$ die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}\,\mathrm{Im}(z)$ komplex differenzierbar ist.

c) Zeigen Sie, dass es keine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt mit

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{1+n^2} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

(1 + 2 + 3 Punkte)

Aufgabe 3:
Es sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}\backslash\{0,1,2\} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{\sin(z)}{z} + \frac{1}{z-2}\left(\exp\left(\frac{1}{1-z}\right) - 1\right) \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie für jede der isolierten Singularitäten von f den Typ und berechnen Sie jeweils das Residuum.

b) Es sei $V := \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |\frac{3}{2} - z| \leq \frac{1}{2}\}$. Zeigen Sie, dass die Einschränkung $f|_{\mathbb{C}\backslash V}$ von f auf $\mathbb{C}\backslash V$ eine Stammfunktion besitzt.

(4 + 2 Punkte)

Aufgabe 4:
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{für } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie alle konstanten Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(y)$.

b) Zeigen Sie, dass jede maximal fortgesetzte Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$ monoton wachsend ist und auf ganz $\mathbb{R}$ existiert.

c) Berechnen Sie explizit eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$y' = f(y), \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

d) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = f(y), \quad y(0) = -1$$

nicht eindeutig lösbar ist.

(1 + 2 + 2 + 1 Punkte)

Aufgabe 5:

a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Es sei ferner $f(0) = 0$ ein lokales Minimum von f. Zeigen Sie, dass

$$f(x) = \int_0^1 (1-t)x^2 f''(tx)dt$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

b) Es sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ wird mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet. Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Sei ferner $F(0) = 0$ ein lokales Minimum von F. Die Hessematrix von F im Punkt $z \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $H_F(z)$. Zeigen Sie, dass

$$F(x) = \int_0^1 (1-t)\langle x, H_F(tx)x \rangle dt$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

(3 + 3 Punkte)