

Thema Nr. 3
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge sprachlich angemessen, nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben. Die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

a) Es sei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit

$$f(1) = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^1 (f(x))^2 dx = 1.$$

Beweisen Sie

$$\int_0^1 x f(x) f'(x) dx = -\frac{1}{2}.$$

b) Es sei $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$a_n := n \cdot \int_0^{1/n} g(t) dt.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $g(0)$ konvergiert.

c) Die Funktion $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar. Für alle $y_0 \in \mathbb{R}$ sei $x \mapsto \frac{\partial h}{\partial y}(x, y_0)$ monoton steigend. Zeigen Sie, dass dann auch $y \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ monoton wächst.

(2 + 2 + 2 Punkte)

Aufgabe 2:

Gegeben sei die meromorphe Funktion

$$f(z) = \prod_{n=1}^3 \frac{1}{z - in}.$$

a) Bestimmen Sie alle isolierten Singularitäten von f sowie jeweils deren Typ und jeweils das Residuum von f in diesen Singularitäten.

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

(4 + 2 Punkte)

Aufgabe 3:

Begründen Sie kurz, dass durch

$$f(z) = \frac{1}{(1 - z^6)^3}$$

auf $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ eine holomorphe Funktion definiert ist.

Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von f um den Ursprung und geben Sie deren Konvergenzradius an.

Hinweis: Geometrische Reihe und deren Ableitungen.

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Für $n \in \mathbb{N}$ und eine n -mal differenzierbare Funktion f bezeichnet $f^{(n)}$ die n -te Ableitung von f . Zeigen Sie:

a) Für jedes $\mu \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \mu < 0$ gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\mu x} = 0$.

b) Für jede Lösung $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y^{(2026)}(x) + y(x) = 0$$

gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x}y(x)) = 0$.

c) Für jede Lösung $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y^{(2026)}(x) - y(x) = 0$$

existiert $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x}y(x))$. Ferner gibt es für jedes $L \in \mathbb{R}$ eine Lösung $y_L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dieser Differentialgleichung, welche $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x}y_L(x)) = L$ erfüllt.

(1 + 2 + 3 Punkte)

Aufgabe 5:

Es ist das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -(x_1 + x_2) \ln(x_1^2 + x_2^2) \\ (x_1 - x_2) \ln(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Ruhelagen der Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$.

b) Begründen Sie, dass keine der Ruhelagen asymptotisch stabil ist.

c) Zeigen Sie: Für jedes $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ erfüllt die maximale Lösung $x : I_{\max} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{mit} \quad x(0) = \xi$$

$$[0, \infty[\subset I_{\max} \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 1.$$

(2 + 2 + 2 Punkte)