

Thema Nr. 2
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge sprachlich angemessen, nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben. Die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Betrachten Sie die folgenden drei Aussagen:

- i) $\forall x \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall \varepsilon > 0 \forall y \in \mathbb{R} : (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$
- ii) $\exists \alpha > 0 \forall x, y \in \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|$
- iii) $\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 \forall x, y \in \mathbb{R} : (|x - y| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \delta)$

Welche der drei Aussagen implizieren, dass f auf \mathbb{R} stetig ist?

Welche der drei Aussagen sind äquivalent zur Stetigkeit von f auf \mathbb{R} ? Begründen Sie Ihre Antwort. Bei Ihren Begründungen eventuell verwendete Aussagen über stetige Funktionen sind dabei zu beweisen. Die Stetigkeit von Polynomfunktionen auf \mathbb{R} darf ohne Beweis verwendet werden.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie mit sorgfältiger Begründung jeweils alle holomorphen Funktionen $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

- a) $\forall z \in \mathbb{C} : f(z)f(\bar{z}) = -1$
- b) $\forall z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}f(z) + \operatorname{Im}f(z) = 1$ und $f(i) = i$
- c) $\forall z \in \mathbb{C} : zf'(z) = f(z)$ und $f'(0) = i$

(2 + 2 + 2 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$ und $f_\alpha: \mathbb{C} \setminus \{\pm\alpha\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f_\alpha(z) := \frac{\sin z}{z^2 - \alpha^2}$. Weiter sei γ der geschlossene Weg, der die Punkte $4 - 4i, 4 + 4i, -1 - i, -1 + i, 4 - 4i$ in der angegebenen Reihenfolge durch Geradenstücke verbindet.

- a) Begründen Sie, für welche Werte von α das komplexe Wegintegral $\int_\gamma f_\alpha(z) dz$ definiert ist.
- b) Bestimmen Sie für die in a) gefundenen Werte von α anhand einer Skizze jeweils die Umlaufzahlen $\operatorname{ind}(\gamma, \alpha)$ und $\operatorname{ind}(\gamma, -\alpha)$.
- c) Berechnen Sie für die in a) gefundenen Werte von α jeweils das komplexe Wegintegral $\int_\gamma f_\alpha(z) dz$.

(1 + 2 + 3 Punkte)

Aufgabe 4:

- a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$x''(t) + f(t)x(t) = 0$$

und sei $H : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion.

Zeigen Sie: Die Funktion $H \cdot \phi$ ist genau dann eine Lösung der oben stehenden Differentialgleichung, wenn H die Gleichung

$$\phi(t)H''(t) + 2\phi'(t)H'(t) = 0$$

erfüllt.

- b) Bestimmen Sie *alle* maximalen Lösungen des Anfangswertproblems

$$x''(t) - \frac{2}{t^2}x(t) = 0 \text{ für } t > 0 \quad \text{mit } x(1) = 3 \text{ und } x'(1) = 0.$$

Hinweis: $\phi :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto t^2$, löst offensichtlich die Differentialgleichung des in diesem Aufgabenteil gegebenen Anfangswertproblems.

(2 + 4 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Zeigen Sie, dass die Null-Lösung eine stabile, stationäre Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ ist.
- b) Bestimmen Sie eine nicht konstante, periodische Lösung $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ der Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$.
- c) Konstruieren Sie eine stetig differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit folgenden Eigenschaften: $\dot{x} = Ax$ ist die Linearisierung der Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ um Null, und die Null-Lösung ist keine stabile Lösung von $\dot{x} = f(x)$.

Hinweis: Es genügt, zur ersten und zur dritten Zeile des linearen Systems geeignete Terme zu addieren.

(2 + 2 + 2 Punkte)