Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge sprachlich angemessen, nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben. Die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

a) Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0, & \text{wenn } x = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist. Berechnen Sie zudem die Ableitung f' von f.

b) Beweisen oder widerlegen Sie: Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $g'(0) > 0$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $g|_{]-\varepsilon,\, \varepsilon[}$ monoton wachsend ist.

(3 + 3 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ hat einen Fixpunkt in $\mathbb{D}$, d. h. es gibt ein $z_* \in \mathbb{D}$ mit $f(z_*) = z_*$? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) $f(z) = z^2 + \frac{1}{2}$

b) $f(z) = e^z - \frac{3}{2}$

c) $f(z) = e^z + 4i$

d) $f(z) = \frac{1}{3}e^z$

(1 + 1 + 2 + 2 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0, i, -i\} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto \frac{1}{1+z^2} \cos\left(\frac{1}{z}\right)$$

und sei $U := \mathbb{C} \setminus \{iy : y \in [-1, 1]\}$.

a) Bestimmen Sie die Art jeder isolierten Singularität von f und berechnen Sie die Residuen von f in jeder isolierten Singularität.

b) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{C} \setminus \{0, i, -i\}$ keine Stammfunktion besitzt.

c) Zeigen Sie, dass die Einschränkung $g := f|_U$ von f auf U eine Stammfunktion besitzt.

(4 + 1 + 1 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei

$$E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \sin(x)\sin(y).$$

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \sin(x)\cos(y) \\ -\cos(x)\sin(y) \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte und alle lokalen Extremstellen von E.

b) Zeigen Sie, dass E eine Erhaltungsgröße der gegebenen Differentialgleichung ist.

c) Untersuchen Sie alle Ruhelagen der gegebenen Differentialgleichung auf Stabilität, asymptotische Stabilität bzw. Instabilität.

(2,5 + 1 + 2,5 Punkte)

Aufgabe 5:

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$x' = \sin(t^2 + x^2), \qquad x(0) = 0.$$

a) Zeigen Sie, dass eine eindeutig bestimmte Lösung φ dieses Anfangswertproblems auf ganz $\mathbb{R}$ existiert und dass diese ungerade ist.

b) Zeigen Sie: Das dritte Taylor-Polynom T_3 von φ um den Entwicklungspunkt 0 hat die Gestalt

$$T_3(t) = \frac{t^3}{3}.$$

c) Zeigen Sie, dass es ein $\tau > 0$ mit $\varphi^{(4)}(\tau) < 0$ gibt. (Hierbei bezeichnet $\varphi^{(4)}$ wie üblich die vierte Ableitung von φ.)
Hinweis: Es könnte hilfreich sein, mittels Widerspruchsannahme zu argumentieren und das Wachstumsverhalten von $\varphi(t)$ für $t \to \infty$ geeignet abzuschätzen.

(2 + 2 + 2 Punkte)