Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge sprachlich angemessen, nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben. Die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

a) Sei A eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Geben Sie je eine Definition dafür an, dass f stetig auf A bzw. gleichmäßig stetig auf A ist.

b) Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/x$. Zeigen Sie, dass g stetig auf $\mathbb{R}^+$ ist, indem Sie Ihre Definition aus a) verifizieren. Ist g gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}^+$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(2 + 4 Punkte)

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie die Laurentreihe im Entwicklungspunkt $-\pi/2$ der Funktion

$$f\colon \mathbb{C} \setminus \{-\pi/2\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{z\cos(z)}{(z+\pi/2)^3}$$

und geben Sie den größten Kreisring an, auf dem diese Laurentreihe konvergiert. Bestimmen Sie weiter das Residuum von f im Punkt $-\pi/2$.

Hinweis: Identitäten zwischen den trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus können hilfreich sein.

b) Sei $B(81,25) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z-81| < 25\}$. Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$\int_{\partial B(81,25)} \frac{\exp\left(\frac{z^2}{z+2025}\right)}{2025+z^2}\,\mathrm{d}z\,.$$

Dabei ist der Rand im mathematisch positiven Sinn orientiert und wird einmal durchlaufen.

(3 + 3 Punkte)

Aufgabe 3:

Für $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ betrachte man das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{\cos(t)}{2 - (\sin(t))^k}(2 - y^k), \qquad y(0) = 1.$$

a) Begründen Sie, warum dieses Anfangswertproblem für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine eindeutige maximale Lösung $\varphi_k : I_k \to \mathbb{R}$ besitzt.

b) Zeigen Sie, dass für das maximale Existenzintervall $I_k = \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Hinweis: Warum ist φ_k nach unten durch die Sinusfunktion und nach oben durch eine Konstante beschränkt?

c) Bestimmen Sie explizit die maximale Lösung des obigen Anfangswertproblems für $k = 1$.

(1 + 3 + 2 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $G \neq \emptyset$ und seien $f, g : G \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Für Teilaufgabe b) sei ferner $\gamma : [0, 1] \to G$ eine stetig differenzierbare, geschlossene Kurve, die den Rand der Einheitskreisscheibe E in $\mathbb{C}$ genau einmal durchläuft und $E \subseteq G$.

Die folgenden drei Aussagen ähneln Versionen wichtiger Sätze der Funktionentheorie, sind aber in dieser Allgemeinheit falsch. Geben Sie jeweils ein Gegenbeispiel an, um letzteres zu belegen, und korrigieren Sie die Formulierungen unter Angabe der Namen der Sätze.

a) Ist f beschränkt, so ist f konstant.

b) Gilt $|g(z)| \leq |f(z)|$ für alle $z \in \gamma([0, 1])$, so haben f und $f + g$ im Inneren der Kurve γ gleich viele Nullstellen (gerechnet mit Vielfachheiten).

c) Besitzt die Menge $\{z \in G : f(z) = g(z)\}$ einen Häufungspunkt, dann ist $f = g$.

(2 + 2 + 2 Punkte)

Aufgabe 5:

Gegeben sei in Abhängigkeit des Parameters $a \in \mathbb{R}$ die reelle Differentialgleichung

$$\dot{x} = -x^4 + ax^2.$$

a) Geben Sie in Abhängigkeit von a die stationären Lösungen an.

b) Untersuchen Sie im Falle $a > 0$ die stationären Lösungen auf (asymptotische) Stabilität.

(2 + 4 Punkte)