Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ___ Kennwort: ___ Arbeitsplatz-Nr.: ___	**Frühjahr 2025**	**63910**

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Analysis**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 8

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge sprachlich angemessen, nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben. Die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

Aufgabe 1:

Wir betrachten die holomorphe Funktion

$$f\colon \Omega := \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, \quad f(z) := \frac{z(z-2)}{e^{2\pi i z} - 1}.$$

a) Bestimmen Sie alle Singularitäten von f in $\mathbb{C}$ und geben Sie jeweils den Typ an.

b) Berechnen Sie die Residuen von f in allen Singularitäten.

c) Entscheiden Sie begründet, ob die Funktion f auf Ω eine Stammfunktion hat.

d) Sei γ der geschlossene Polygonzug, der die Punkte

$$\frac{3}{2} - 2i, \frac{3}{2} + 2i, -\frac{3}{2} - i, -\frac{3}{2} + i, \frac{3}{2} - 2i$$

in der angegebenen Reihenfolge geradlinig verbindet. Berechnen Sie das komplexe Wegintegral

$$\int_\gamma f(z)\, dz.$$

Sie dürfen die Umlaufzahl an einer Skizze ablesen. **(1 + 1 + 1 + 3 Punkte)**

Aufgabe 2:

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung an (mit Nennung aller benutzten Sätze) oder ein Gegenbeispiel.

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar. Es gelte

$$f(2) = 5 \quad \text{und} \quad f'(x) \geq 1 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $f(5) \geq 8$.

b) Es sei $f\colon \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $|f'(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Dann ist $|f(0)| \leq 1$.

c) Es sei $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Kurve mit $\gamma(0) = (0,0)$ und $\gamma(1) = (2,5)$. Dann existiert ein $t \in [0,1]$ mit

$$\gamma(t) \in S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + y^2 = 1\}.$$

d) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergiert.

e) Jede nach oben beschränkte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nimmt einen maximalen Wert an.

(1 + 1 + 2 + 1 + 1 Punkte)

Aufgabe 3:

Wir betrachten die holomorphe Funktion

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Zeigen Sie:

a) $f(z + \pi i) = -f(z)$ und $f(z + 2\pi i) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

b) f ist surjektiv.

c) Für ein festes $w \in \mathbb{C}$ haben die Lösungen der Gleichung $f(z) = w$ für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_0) = w$ die Form

$$z = \pm z_0 + 2\pi i n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

d) $f(\mathbb{R}) = [1, \infty)$ und $f(\mathbb{R} + \pi i) = (-\infty, -1]$.

e) f bildet den Streifen $S = \{z \in \mathbb{C} \colon 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ biholomorph auf das Gebiet

$$\Omega := \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, \infty))$$

ab.

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass Abbildungen, die holomorph und bijektiv sind, biholomorph sind.

(1 + 1 + 1 + 1 + 2 Punkte)

Aufgabe 4:

Für $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ betrachten wir auf $\mathbb{R}$ die reellwertige Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) \quad \text{für} \quad F(x) = b + 2ax - cx^2.$$

a) Bestimmen Sie die Ruhelagen dieser Differentialgleichung in Abhängigkeit von a, b, c.

b) Zeigen Sie, dass für $a^2 + bc < 0$ das zugehörige Anfangswertproblem mit $x(0) = 2$ keine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ besitzt.

c) Seien b und c so gewählt, dass $x_0 = 2$ eine Ruhelage ist mit $F'(2) \neq 0$. Bestimmen Sie, für welche Werte des Parameters a diese Ruhelage stabil bzw. asymptotisch stabil ist.

(2 + 2 + 2 Punkte)

Aufgabe 5:

Für $\alpha > 0$ bezeichne

$$f_\alpha : \mathbb{R}\times]0,\infty[\to \mathbb{R}, \qquad f_\alpha(t,x) := x^\alpha \cos(t).$$

Geben Sie die Teilmenge $A \subseteq]0,\infty[$ an, die genau aus den $\alpha > 0$ besteht, für die das Anfangswertproblem

$$(\mathrm{AWP}_\alpha) \qquad \dot{x} = f_\alpha(t,x), \quad x(0) = 1,$$

genau eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung besitzt. Weisen Sie Ihr Ergebnis nach, indem Sie

a) für alle $\alpha \in A$ diese Lösung explizit bestimmen und deren Eindeutigkeit begründen,

b) für alle $\alpha \in]0,\infty[\setminus A$ zeigen, dass keine Lösung auf $\mathbb{R}$ existieren kann oder dass es mindestens zwei verschiedene auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösungen gibt.

Hinweis: Betrachten Sie den Fall $\alpha = 1$ gesondert.

(6 Punkte)