

---

Prüfungsteilnehmer

Prüfungstermin

Einzelprüfungsnummer

---

Kennzahl: \_\_\_\_\_

Kennwort: \_\_\_\_\_

Arbeitsplatz-Nr.: \_\_\_\_\_

---

**Frühjahr**  
**2024**

**63910**

**Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen**  
**— Prüfungsaufgaben —**

---

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Analysis**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): **3**

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: **8**

---

Bitte wenden!

Thema Nr. 1  
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge sprachlich angemessen, nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben. Die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

**Aufgabe 1:**

- a) Zeigen Sie, dass jede stetige Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\lim_{\|(x,y)\|_2 \rightarrow \infty} f(x,y) = \infty$$

ein globales Minimum besitzt. Hierbei bezeichnet  $\|\cdot\|_2$  mit  $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$  für  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$  die euklidische Norm auf  $\mathbb{R}^2$ .

- b) Begründen Sie, dass die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x,y) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2 - 2)^2 - \frac{1}{3}y^3$$

ein globales Minimum besitzt, und bestimmen Sie dieses sowie alle globalen Minimalstellen von  $f$ .

**(2 + 4 Punkte)**

**Aufgabe 2:**

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x' &= -x(e^x - 1)^2 + y, \\ y' &= -2x - y^3. \end{aligned}$$

- a) Zeigen Sie, dass  $(0,0)$  die einzige Ruhelage des Systems ist.  
 b) Begründen Sie, dass ein Ansatz über Linearisierung nicht zielführend ist, wenn es darum geht, das Stabilitätsverhalten von  $(0,0)$  zu bestimmen.  
 c) Beweisen Sie, dass  $(0,0)$  asymptotisch stabil ist.  
*Hinweis:* Eine Lyapunov-Funktion der Form  $V(x,y) = \alpha x^2 + \beta y^2$  mit geeigneten  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  kann hierbei hilfreich sein.

**(1 + 2 + 3 Punkte)**

**Aufgabe 3:**

Zeigen Sie, dass für jedes  $\alpha \in (-1,1)$

$$\int_0^\pi \frac{1}{1 - \alpha \cos(t)} dt = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$$

gilt.

*Hinweis:* Es kann hilfreich sein, dieses Integral in ein Integral zu überführen, bei dem über das Intervall  $[0, 2\pi]$  integriert wird.

**(6 Punkte)**

**Aufgabe 4:**

- a) Formulieren Sie den Satz von Rouché.
- b) Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $a \in \mathbb{C}$  mit  $|a| > e$ . Zeigen Sie, dass die Gleichung  $az^n = e^z$  genau  $n$  Lösungen (unter Berücksichtigung von Vielfachheiten) in der offenen komplexen Einheitskreisscheibe  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  hat.
- c) Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $a \in \mathbb{C}$  mit  $|a| < 1/e$ . Zeigen Sie, dass die Gleichung  $az^n = e^z$  keine Lösungen in  $\mathbb{D}$  hat.

(2 + 2 + 2 Punkte)

**Aufgabe 5:**

- a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$x_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_a(t) = \begin{cases} 3e^{-t} + t - 1 & \text{für } t \geq 0 \\ e^{-t} + 1 - t & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + x(t) = |t| \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

ist.

- b) Bestimmen Sie eine Lösung  $x_b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + x(t) = t^2 \\ x(0) = 2. \end{cases}$$

- c) Zeigen Sie, dass es eine reelle Zahl  $c \in [0, 1]$  gibt, sodass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + x(t) = \sqrt{ct^2 + (1-c)t^4} \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

eine auf ganz  $\mathbb{R}$  existierende Lösung  $x_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  hat, für die  $x_c(4) = 7$  ist.

*Hinweis:* Verwenden Sie die Teilaufgaben a) und b).

(2 + 2 + 2 Punkte)