

**Thema Nr. 1**  
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

**Aufgabe 1** (12 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass das Polynom  $x^7 + 3x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$  irreduzibel ist.
- (b) Bestimmen Sie die Ordnung der Permutation  $(12)(34)(567) \in S_7$ .
- (c) Sei  $G$  eine abelsche Gruppe und seien  $a, b, c \in G$ . Angenommen  $a$  hat Ordnung 2,  $b$  hat Ordnung 4 und  $c$  hat Ordnung 6. Bestimmen Sie die Ordnung von  $abc \in G$ .
- (d) Bestimmen Sie alle Einheitswurzeln in dem Körper  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ .

**Aufgabe 2** (12 Punkte)

Sei  $G$  eine Gruppe.

- (a) Sei  $H \subseteq G$  eine Untergruppe von endlichem Index. Zeigen Sie, dass die Menge  $\{gHg^{-1} \mid g \in G\}$  endlich ist.
- (b) Es seien  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  und es seien  $H_1, H_2 \subseteq G$  Untergruppen von  $G$  mit  $[G : H_1] = n_1$  und  $[G : H_2] = n_2$ . (Für eine Untergruppe  $K$  von  $G$  bezeichnet  $[G : K]$  den Index von  $G$  nach  $K$ .) Zeigen Sie, dass  $[G : (H_1 \cap H_2)] \leq n_1 n_2$  ist.
- (c) Sei  $H \subseteq G$  eine Untergruppe von endlichem Index. Zeigen Sie, dass ein Normalteiler  $N \subseteq G$  von endlichem Index existiert, für den  $N \subseteq H$  gilt.

**Aufgabe 3** (12 Punkte)

Seien  $p$  eine Primzahl,  $q = p^n$  ( $n \geq 1$ ) eine Primzahlpotenz und  $\mathbb{F}_q$  der endliche Körper mit  $q$  Elementen.

- (a) Zeigen Sie im Falle  $p \neq 2$ :  $|\{x^2 \mid x \in \mathbb{F}_q\}| = \frac{q+1}{2}$ .
- (b) Sei  $\alpha \in \mathbb{F}_q$  gegeben. Zeigen Sie, dass  $x, y \in \mathbb{F}_q$  so existieren, dass  $\alpha = x^2 + y^2$  gilt.  
Hinweis: Betrachten Sie den Schnitt der Mengen  $\{\alpha - x^2 \in \mathbb{F}_q \mid x \in \mathbb{F}_q\}$  und  $\{y^2 \in \mathbb{F}_q \mid y \in \mathbb{F}_q\}$ .

Fortsetzung nächste Seite!

**Aufgabe 4** (12 Punkte)

Seien  $p > 0$  eine Primzahl,  $\mathbb{Q} \subseteq K$  eine Körpererweiterung vom Grad  $p$ ,  $\alpha \in K$  ein Element mit  $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ ,  $\alpha_1 := \alpha, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C}$  die Konjugierten von  $\alpha$  über  $\mathbb{Q}$  und letztlich  $E := \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$  die normale Hülle von  $K/\mathbb{Q}$ .

- (a) Zeigen Sie, z.B. durch Betrachten der Operation der Galoisgruppe auf den Nullstellen, dass die Galoisgruppe  $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$  eine zyklische Untergruppe der Ordnung  $p$  enthält.
- (b) Zeigen Sie: Gilt  $\alpha_2 \in K$ , so folgt  $K = E$ .

**Aufgabe 5** (12 Punkte)

Sei  $K = \{0, 1, a, b\}$  ein Körper mit vier Elementen (0 sei das Nullelement, 1 das Einselement).

- (a) Stellen Sie die Additions- und die Multiplikationstabelle von  $K$  auf.
- (b) Sei  $f(X) = X^4 + X + 1 \in K[X]$ . Zeigen Sie, dass  $f$  reduzibel ist.
- (c) Bestimmen Sie den Grad des Zerfällungskörpers von  $f$  über  $K$ .