## Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

**Aufgabe 1:**

Sei $K$ ein Körper. Eine quadratische Matrix $A \in M_n(K)$ heißt nilpotent, wenn ein $m \in \mathbb{N}$ mit $A^m = 0$ existiert. Zeigen Sie:

i) Ist $A \in M_n(K)$ nilpotent, so gilt für das charakteristische Polynom $\mathcal{X}_A(X) = X^n$.

ii) Ist $A \in M_n(K)$ nilpotent und diagonalisierbar, so gilt $A = 0$.

(8 Punkte)

**Aufgabe 2:**

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $S_n$ die n-te symmetrische Gruppe. Die Gruppe $S_n$ und ihre Untergruppen operieren in natürlicher Weise von links auf der Menge $\{1, \ldots, n\}$. Ferner sei $p$ eine Primzahl.

i) Für Untergruppen $G_1$ und $G_2$ in $S_n$ sei $G_2$ ein Normalteiler in $G_1$ und $G_1$ operiere transitiv auf der Menge $\{1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, dass alle $G_2$-Bahnen in $\{1, \ldots, n\}$ dieselbe Länge haben.

ii) Für Untergruppen $G_1$ und $G_2$ in $S_p$ sei $G_2$ ein Normalteiler in $G_1$ und $G_1$ operiere transitiv auf $\{1, \ldots, p\}$. Zeigen Sie, dass $G_2$ transitiv auf $\{1, \ldots, p\}$ operiert, falls $G_2 \neq \{\mathrm{id}\}$ gilt.

iii) Sei $H$ eine Untergruppe von $S_p$, die transitiv auf $\{1, \ldots, p\}$ operiert und eine Primzahlordnung $q$ hat. Zeigen Sie, dass $p = q$ gilt und $H$ ein Element der Ordnung $p$ enthält.

(15 Punkte)

**Aufgabe 3:**

Ist $p$ eine Primzahl und $q = p^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so bezeichne $\mathbb{F}_q$ den endlichen Körper mit $q$ Elementen. Betrachten Sie die Polynome $f = X^7 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ und $g = X^7 - X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

i) Zeigen Sie, dass $f$ keine Nullstellen in den Körpern $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_4$ und $\mathbb{F}_8$ besitzt.

ii) Folgern Sie aus i), dass $f$ irreduzibel in $\mathbb{F}_2[X]$ ist.

iii) Zeigen Sie, dass $g$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist.

(14 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

**Aufgabe 4:**

Sei $L$ der Zerfällungskörper von $X^{12} - 729 \in \mathbb{Q}[X]$ in $\mathbb{C}$ und $\zeta$ die primitive 12-te Einheitswurzel $\exp(2\pi i/12) = \frac{\sqrt{3}+i}{2} \in \mathbb{C}$.

i) Zeigen Sie: $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\zeta)$ und $L = \mathbb{Q}(\zeta)$.

ii) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ eine abelsche Gruppe der Ordnung vier ist, die genau drei Elemente der Ordnung zwei enthält.

iii) Beschreiben Sie alle echten Zwischenkörper der Erweiterung $L/\mathbb{Q}$, indem Sie für jeden echten Zwischenkörper ein primitives Element angeben.

(15 Punkte)

**Aufgabe 5:**

Das irreduzible Polynom $f \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$ besitze eine Nullstelle $\alpha \in \mathbb{R}$ und eine Nullstelle $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Sei $L$ der Zerfällungskörper von $f$ in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ nicht abelsch ist.

(8 Punkte)