Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei K ein Körper, V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $\phi : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus von V, dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Beweisen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(1) Alle Eigenräume von ϕ sind eindimensional.

(2) Zu jedem Eigenwert von ϕ existiert in der Jordanschen Normalform genau ein Jordanblock.

(3) Das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom von ϕ sind gleich.

(12 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei $p \geq 3$ eine ungerade Primzahl und $\mathbb{F}_{p^2}$ der Körper mit p^2 Elementen. Beweisen Sie:

(a) Die Abbildung $f : \mathbb{F}_{p^2} \longrightarrow \mathbb{F}_{p^2}$, die durch $f(a) = a^p$ gegeben ist, ist ein Isomorphismus von Ringen.

(b) Durch die Vorschrift $g(a) = a + a^p$ ist eine Abbildung $g : \mathbb{F}_{p^2} \longrightarrow \mathbb{F}_p$ gegeben, und diese ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus.

(c) Durch die Vorschrift $h(a) = a^{p+1}$ ist eine Abbildung $h : \mathbb{F}_{p^2}^* \longrightarrow \mathbb{F}_p^*$ gegeben, und diese ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus.

(4+4+4 Punkte)

Aufgabe 3:

Es sei G eine Gruppe der Ordnung $|G| = 7^2 \cdot 8$. Mit Syl_7 bezeichnen wir die Menge der 7-Sylowgruppen und mit n_7 die Anzahl der 7-Sylowgruppen von G. Zeigen Sie mithilfe der folgenden Schritte, dass G nicht einfach ist.

(a) Begründen Sie, dass $n_7 \in \{1, 8\}$ gilt.

(b) Begründen Sie, dass G im Fall $n_7 = 1$ nicht einfach ist.

(c) Begründen Sie, dass

$$\cdot : G \times \mathrm{Syl}_7 \to \mathrm{Syl}_7\,, \quad (g, P) \mapsto g\,P\,g^{-1}$$

eine transitive Operation von G auf Syl_7 ist.

(d) Begründen Sie, dass G auch im Fall $n_7 = 8$ nicht einfach ist.

(2+2+2+6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

In einem assoziativen Ring R mit Einselement gelte für jedes Element $x \in R$ entweder $x^2 = 1$ oder $x^n = 0$ für ein $n \geq 1$.

(a) Beweisen Sie, dass die Einheitengruppe von R kommutativ ist.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes Element $x \in R$ entweder x oder $1 - x$ eine Einheit ist.

(c) Beweisen Sie, dass R ein kommutativer Ring ist.

(3+3+6 Punkte)

Aufgabe 5:

Finden Sie zwei Polynome $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ gleichen Grades, so dass $\mathrm{Gal}(f)$ und $\mathrm{Gal}(g)$ gleich viele Elemente haben, aber $\mathrm{Gal}(f)$ abelsch und $\mathrm{Gal}(g)$ nicht abelsch ist. (12 Punkte)