Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Seien N ein auflösbarer Normalteiler einer endlichen Gruppe G und H eine weitere auflösbare Untergruppe von G. Zeigen Sie, dass

$$NH = \{nh \mid n \in N, h \in H\}$$

wieder eine auflösbare Untergruppe von G ist. (12 Punkte)

Aufgabe 2:

Seien p eine Primzahl und $k \leq p - 2$. Zeigen Sie, dass die Einheitsmatrix I_k die einzige Matrix $A \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{Q})$ mit der Eigenschaft $A^p = I_k$ ist. (12 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Zu jedem $a \in R$ existiere ein $b \in R$ mit $a^2 \cdot b = a$.

(a) Zeigen Sie, dass R reduziert ist, das heißt, dass 0 das einzige nilpotente Element in R ist.

(b) Zeigen Sie weiter, dass jedes Primideal $\mathfrak{p}$ in R maximal ist.

(12 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei $a \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren eine Folge (x_n), $n \in \mathbb{N}_0$ durch

$$x_n := a^{2^n} + 1.$$

1. Sei $n < m$. Zeigen Sie, dass x_n ein Teiler von $x_m - 2$ ist.
2. Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler von x_n und x_m.
3. Folgern Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

(12 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei $f(X)$ ein separables Polynom über $\mathbb{Q}$, welches in der Form $f(X) = h(X^2)$ mit $h(X) \in \mathbb{Q}[X]$ und $n := \deg h(X) \geq 2$ geschrieben werden kann. Zeigen Sie, dass die Galoissche Gruppe (eines Zerfällungskörpers) von $f(X)$ nicht die volle symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_{2n}$ der Nullstellen sein kann.

(12 Punkte)