Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Seien $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit $x^2 + y^2 = z^2$. Zeigen Sie, dass das Produkt xyz durch 60 teilbar ist.

(12 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Es bezeichne $\varphi(n)$ den Wert der Euler'schen φ-Funktion bei n. Zeigen Sie, dass es genau $\varphi(n)$ verschiedene injektive Gruppenhomomorphismen $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ gibt.

(15 Punkte)

Aufgabe 3:
Betrachten Sie das Polynom $f(X) = X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_5[X]$.

a) Zeigen Sie, dass $K := \mathbb{F}_5[X]/(f(X))$ ein Körper mit 25 Elementen ist. (4 Punkte)

b) Bestimmen Sie ein Element $w \in K$, mit $w^2 = 2$. (6 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{F}_5)$$

über K diagonalisierbar ist. (5 Punkte)

Aufgabe 4:
Es sei $p \geq 3$ eine Primzahl und $a \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl, so dass $X^p - a$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist. Ferner sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive p-te Einheitswurzel, $\alpha \in \mathbb{C}$ eine beliebige Nullstelle von $X^p - a$ und $Z := \mathbb{Q}(\alpha, \zeta)$.

a) Zeigen Sie, dass Z ein Zerfällungskörper von $X^p - a$ ist und $[Z : \mathbb{Q}] = p(p-1)$ gilt.

(5 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Gal}(Z|\mathbb{Q})$ eine p-Sylowgruppe H besitzt, die ein Normalteiler ist, und dass

$$\mathrm{Gal}(Z|\mathbb{Q})/H \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\} \textit{ gilt.}$$

(5 Punkte)

c) Bestimmen Sie einen Gruppenisomorphismus $\mathrm{Gal}(Z|\mathbb{Q}(\alpha)) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$. (5 Punkte)

d) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Gal}(Z|\mathbb{Q})$ mehr als eine 2-Sylowgruppe besitzt. (3 Punkte)