Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie alle Matrizen A in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, die mit der Matrix

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kommutieren. (6 Punkte)

Aufgabe 2:
Wieviele Elemente der Ordnung 15 gibt es in der symmetrischen Gruppe S_8? (14 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ die wie folgt rekursiv definierte Folge ganzer Zahlen:

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = a_n^2 + 1 \text{ für } n \geq 0.$$

Sei $N \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie: Ist N ein Teiler von a_n, dann teilt N auch a_{kn} für alle $k \geq 2$.
(14 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung und seien $\alpha, \beta \in L$ algebraisch über K. Sei f das Minimalpolynom von α über K und g das Minimalpolynom von β über K. Zeigen Sie, dass f irreduzibel über $K(\beta)$ ist genau dann, wenn g irreduzibel über $K(\alpha)$ ist. (12 Punkte)

Aufgabe 5:
Sei $\xi = \sqrt{2+\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie das Minimalpolynom $m(X)$ von ξ über $\mathbb{Q}$. (6 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})$ Galois'sch ist und berechnen Sie die Galoisgruppe. (8 Punkte)