## Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

### Aufgabe 1:

Sei $r \geq 1$. Die komplexen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ seien alle algebraisch vom Grad 2 über $\mathbb{Q}$. Setze $K = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$. Zeigen Sie, dass $K$ eine Galoiserweiterung von $\mathbb{Q}$ ist. Sei $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ und $C_2$ eine Gruppe der Ordnung 2. Geben Sie einen natürlichen injektiven Gruppenhomomorphismus $G \to C_2^r$ an.

(6 Punkte)

### Aufgabe 2:

Sei $f = X^4 - X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Zeigen Sie, dass $f$ genau zwei reelle Nullstellen $x_1$ und $x_2$ hat.

b) Zeigen Sie, dass $f$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

c) Sei $g = X^3 + 4X - 1$, und $a \in \mathbb{C}$ komplex. Zeigen Sie, dass es genau dann komplexe Zahlen $b, c, d \in \mathbb{C}$ gibt mit $f = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d)$, wenn $g(a^2) = 0$.

d) Zeigen Sie, dass $g$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

e) Sei $g(a^2) = 0$ für $a \in \mathbb{R}$ reell. Zeigen Sie, dass $a \in \mathbb{Q}[x_1, x_2]$.

f) Zeigen Sie, dass $x_1$ oder $x_2$ nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

(6 Punkte)

### Aufgabe 3:

a) Eine Permutation $\sigma$ sei das Produkt zweier disjunkter Zykel der teilerfremden Längen $k$ und $\ell$. Welche Ordnung hat $\sigma$?

b) Sei $a(n)$ die größte Elementordnung in der symmetrischen Gruppe $S_n$. Man zeige $\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{n} = \infty$.

(6 Punkte)

### Aufgabe 4:

Sei $p$ eine Primzahl, $e, n \in \mathbb{N}$ und $G$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$ mit $p^e$ Elementen. Zeigen Sie: Es gibt einen Spaltenvektor $0 \neq v \in \mathbb{F}_p^n$ mit $\gamma \cdot v = v$ für alle $\gamma \in G$. (Hinweis: Betrachten Sie die Bahnlängen von $G$ auf $\mathbb{F}_p^n$.)

(6 Punkte)

### Aufgabe 5:

Es sei $p$ eine Primzahl. Man zeige, dass außer 3 jeder Primteiler von $2^p + 1$ größer als $p$ ist. (Hinweis: Betrachte die multiplikative Ordnung von 2 modulo eines Primteilers von $2^p + 1$.)

(6 Punkte)