

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Seien $n, m > 0$ natürliche Zahlen. Mit $M_{n,m}(\mathbb{Q})$ bezeichnen wir die Menge der $(n \times m)$ -Matrizen mit rationalen Einträgen. Seien $GL_n(\mathbb{Q})$ und $GL_m(\mathbb{Q})$ die allgemeinen linearen Gruppen in den Dimensionen n und m über \mathbb{Q} .

a) Zeigen Sie, dass die Gruppe $GL_n(\mathbb{Q}) \times GL_m(\mathbb{Q})$ vermöge

$$(GL_n(\mathbb{Q}) \times GL_m(\mathbb{Q})) \times M_{n,m}(\mathbb{Q}) \rightarrow M_{n,m}(\mathbb{Q}), \quad ((S, T), A) \mapsto S \cdot A \cdot T^{-1}$$

auf $M_{n,m}(\mathbb{Q})$ operiert, aber nicht effektiv. (Dabei heißt eine Gruppenoperation $G \times X \rightarrow X$ einer Gruppe G auf einer Menge X *effektiv*, wenn aus $\forall x \in X: g \cdot x = x$ für ein Gruppenelement $g \in G$ schon $g = 1$ folgt.)

b) Zeigen Sie, dass diese Operation genau $r + 1$ Bahnen besitzt, dabei ist $r := \min(m, n)$.
(Tipp: Verwenden Sie den Rang einer Matrix.) (6 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass das Polynom $f(X) = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ keine mehrfachen Nullstellen in den komplexen Zahlen besitzt. (6 Punkte)

Aufgabe 3:

Seien p eine Primzahl und ζ eine primitive p -te Einheitswurzel in \mathbb{C} . Sei $R = \mathbb{Z}[\zeta]$ der von ζ erzeugte Unterring von \mathbb{C} . Sei $a \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{Z} / \left(\sum_{\ell=0}^{p-1} a^\ell \right) \rightarrow R / (a - \zeta), \quad n + \left(\sum_{\ell=0}^{p-1} a^\ell \right) \mapsto n + (a - \zeta)$$

ein wohldefinierter Ringisomorphismus ist und folgern Sie daraus, dass $2 - \zeta$ genau dann ein Primelement in R ist, wenn $2^p - 1$ eine Primzahl ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei p eine Primzahl. Sei K ein Körper der Charakteristik 0.

- a) Sei E eine (endliche) galoissche Körpererweiterung von K . Zeigen Sie, dass E/K einen Zwischenkörper F/K besitzt, so dass der Grad $[E : F]$ eine p -Potenz ist und der Grad $[F : K]$ nicht von p geteilt wird. (Die Zahl 1 ist eine p -Potenz für jede Primzahl p .)
- b) Besitze K die Eigenschaft, dass der Grad $[L : K]$ jeder nicht trivialen endlichen Körpererweiterung L/K von p geteilt wird. Zeigen Sie, dass dann der Grad einer jeden endlichen Körpererweiterung über K eine p -Potenz ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei p eine Primzahl. Für jede nicht verschwindende ganze Zahl a sei $\nu_p(a)$ der Exponent von p in der Primfaktorzerlegung von a (also insbesondere genau dann 0, falls p kein Teiler von a ist). Ist b eine weitere nicht verschwindende ganze Zahl, so definieren wir $\nu_p\left(\frac{a}{b}\right) := \nu_p(a) - \nu_p(b)$.

- a) Sei $\frac{a}{b}$ ein vollständig gekürzter Bruch mit $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass sich der Winkel $\frac{2\pi}{b}$ aus dem Winkel $\frac{2\pi a}{b}$ nur mit Zirkel und Lineal konstruieren läßt.
- b) Sei $r \in \mathbb{Q}^\times$ eine nicht verschwindende rationale Zahl. Zeigen Sie, dass sich der Winkel $2\pi r$ genau dann mit Zirkel und Lineal dritteln läßt, wenn $\nu_3(r) \geq 0$ gilt.

(6 Punkte)