Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Geben Sie drei nicht-isomorphe Gruppen der Ordnung 2012 konkret an und beweisen Sie, dass diese nicht isomorph sind!

(5 Punkte)

Aufgabe 2:
Zeigen Sie, dass für jedes $n \in$ der Zentralisator des n–Zyklus $(1, 2, 3, \ldots, n)$ in der symmetrischen Gruppe S_n die zyklische Gruppe $\langle(1, 2, 3, \ldots, n)\rangle$ ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:
Es sei $P(X) = X^4 - 2 \in \ [X]$. Es sei K der Zerfällungskörper des Polynoms $P(X)$ in über . Ferner sei $\alpha \in K$ eine Nullstelle von $P(X)$.

a) Zeigen Sie, dass $[K : \ ] = 8$ gilt, und dass es eine Nullstelle $\beta \neq \pm\alpha$ von $P(X)$ in K gibt, so dass $R := \{\pm\alpha, \pm\beta\}$ die Menge aller Nullstellen von $P(X)$ ist.

b) Es bezeichne S_R die Gruppe der Permutationen von R. Sei $s \in S_R$ die Permutation $R \to R,\ x \mapsto -x$. Zeigen Sie, dass die Untergruppe $C := \{\sigma \in S_R : \ \sigma \circ s = s \circ \sigma\}$ Ordnung 8 hat.

c) Es bezeichne $G := \mathrm{Gal}(K/\ )$ die Galoisgruppe von K über . Zeigen Sie, dass der Gruppenhomomorphismus
$$\rho : G \longrightarrow S_R,\ \sigma \longmapsto (x \mapsto \sigma(x))$$
einen Gruppenisomorphismus zwischen G und C induziert.

d) Ist G auflösbar?

(8 Punkte)

Aufgabe 4:
Wie viele Lösungen hat die Gleichung $X^2 + 46X + 1 \equiv 0$ in $/2012$? (503 ist eine Primzahl.)

(6 Punkte)

Aufgabe 5:
Zerlegen Sie das Polynom $X^5 - 7X^3 + 503X^2 + 12X - 2012$ in $[X]$ in irreduzible Faktoren!

(5 Punkte)