Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen.

Aufgabe 1:

Eine Gruppe der Ordnung 91 operiere auf einer Menge mit 71 Elementen. Zeigen Sie: Die Operation hat einen Fixpunkt.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

a) Zeigen Sie: Jede endlich erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ ist zyklisch.

b) Geben Sie eine echte nichtzyklische Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ an.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

Ein Polynom $f \in \mathbb{Z}[X]$ heiße *superprimitiv*, falls es paarweise teilerfremde Koeffizienten hat. Beweisen Sie oder widerlegen Sie: Das Produkt von zwei superprimitiven Polynomen ist wieder superprimitiv.

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Betrachten Sie die Körpererweiterung $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{11})$ von $\mathbb{Q}$.

a) Zeigen Sie, dass K Galoissch über $\mathbb{Q}$ ist und bestimmen Sie die Galoisgruppe.

b) Bestimmen Sie alle Teilkörper von K.

c) Bestimmen Sie ein primitives Element von K über $\mathbb{Q}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei $P := X^4 + X + 2 \in \mathbb{F}_3[X]$ und $K = \mathbb{F}_3[X]/(P)$. Weiter sei a das Bild von X in K.

a) Zeigen Sie, dass K ein Körper mit 81 Elementen ist.

b) Bestimmen Sie explizit alle Teilkörper von K. Hierbei heiße "explizit": Die Angabe einer $\mathbb{F}_3$-Basis, wobei die Basiselemente Polynome in a vom Grad ≤ 3 sind. [Hinweis: Betrachten Sie $a^{10} \in K$.]

(6 Punkte)