

Thema Nr. 3
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung:

Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:

Sei p eine Primzahl. Man gebe eine nicht kommutative Gruppe der Ordnung p^3 an. (6 Punkte)

Aufgabe 2:

Für welche natürlichen Zahlen $n \geq 2$ ist n ein Teiler von $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1)$? (6 Punkte)

Aufgabe 3:

Es sei $\Phi_d(X) \in \mathbb{Z}[X]$ das d -te Kreisteilungspolynom. Ferner seien $n \geq 1$ und z ganze Zahlen. Zeigen Sie:

Ist p Primzahl mit $p \nmid n$, so gilt

$$p \mid \Phi_n(z) \implies \begin{cases} z^n \equiv 1 \pmod{p} \\ \text{und} \\ z^d \not\equiv 1 \pmod{p} \text{ für alle } d \mid n, 1 \leq d < n \end{cases}$$

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ein separables Polynom der Form $f(X) = h(X^2)$ für ein $h(X) \in \mathbb{Q}[X]$. Sei $n \geq 2$ der Grad von h . Man zeige, dass die Galoisgruppe von f über \mathbb{Q} isomorph zu einer echten Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_{2n} ist. (6 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei \mathbb{F}_q ein endlicher Körper mit q Elementen. Beweisen Sie:

Jede Abbildung $\mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{F}_q$ lässt sich als polynomiale Abbildung $x \mapsto f(x)$ für ein Polynom $f \in \mathbb{F}_q[X]$ vom Grade höchstens $q-1$ darstellen. (6 Punkte)