

Thema Nr. 3

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen.

Aufgabe 1 (7 Punkte):

- Bestimmen Sie alle Isomorphietypen abelscher Gruppen mit 56 Elementen!
- Zeigen Sie: Jede Gruppe mit 56 Elementen enthält eine normale Sylowuntergruppe $\neq 1$.
- Zeigen Sie: Enthält eine solche Gruppe G mit 56 Elementen eine nicht-normale 7-Sylowuntergruppe H und bezeichnet K die 2-Sylowuntergruppe in G , so ist $K \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

[Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass der Zentralisator von K in H trivial ist und folgern Sie daraus, dass H auf den Elementen $\neq 1$ von K transitiv operiert.]

Aufgabe 2 (9 Punkte):

Es sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie:

- Die Abbildung

$$N : R \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad a + b\sqrt{2} \mapsto |a^2 - 2b^2|$$

ist multiplikativ.

- R ist ein euklidischer Ring bezüglich N .
- Ein Element $r \in R$ ist genau dann eine Einheit, wenn $N(r) = 1$ ist.
- R besitzt unendlich viele Einheiten.
- Zerlegen Sie das Element 21 in R in Primfaktoren.

Aufgabe 3 (7 Punkte):

Geben Sie alle Lösungen X der Gleichung

$$X^7 = \mathbb{1}_5$$

in der Gruppe $GL_5(\mathbb{Q})$ an (mit Begründung).

Aufgabe 4 (7 Punkte):

- Geben Sie ein Verfahren an, um mit Zirkel und Lineal zu einem gegebenen Dreieck ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt zu konstruieren!
- Sei α eine algebraische Zahl vom Grad 4 über \mathbb{Q} und N der normale Abschluss von $\mathbb{Q}(\alpha)$. Zeigen Sie: Wenn $\text{Gal}(N|\mathbb{Q})$ isomorph zur alternierenden Gruppe A_4 ist, kann α nicht mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.