Thema Nr. 2

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen.*

Aufgabe 1 (6 Punkte):

Zeigen Sie, dass es zwei nichtisomorphe nichtabelsche Gruppen der Ordnung 20 gibt!

Aufgabe 2 (6 Punkte):

Sei G eine endliche Gruppe. Zeigen Sie:

a) Ist $\mathrm{Aut}(G)$ zyklisch, so ist G abelsch.

b) Ist $|\mathrm{Aut}(G)| = 2$, so ist G zyklisch der Ordnung 3, 4 oder 6.

Aufgabe 3 (6 Punkte):

Sei R ein (nullteilerfreier, kommutativer) Hauptidealring und $I = Ra$ ein von $\{0\}$ verschiedenes Ideal von R. Zeigen Sie, dass I nur in endlich vielen Idealen von R enthalten ist!

Aufgabe 4 (6 Punkte):

Zeigen Sie, dass das Polynom

$$f(X) = X^3 + X^2 - 2X - 1$$

in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist, und bestimmen Sie den Isomorphie-Typ seiner Galoisgruppe!

Aufgabe 5 (6 Punkte):

Sei K ein endlicher Körper und $L|K$ eine endliche Erweiterung mit Galoisgruppe G. Zeigen Sie, dass $L|K$ eine Normalbasis besitzt, d.h. zeigen Sie die Existenz eines $\alpha \in L$ mit

$$L = \sum_{\sigma \in G} K\sigma(\alpha) \quad .$$